

B1	B2	B3	B4	B5	B6
8	9	1,5	36	150500	14
B7	B8	B9	B10	B11	B12
3,5	400	24	360	4	15

C1 Решите систему

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

Если $\cos y = 0$, то $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, при этом из второго уравнения следует, что $x = (-1)^k$.

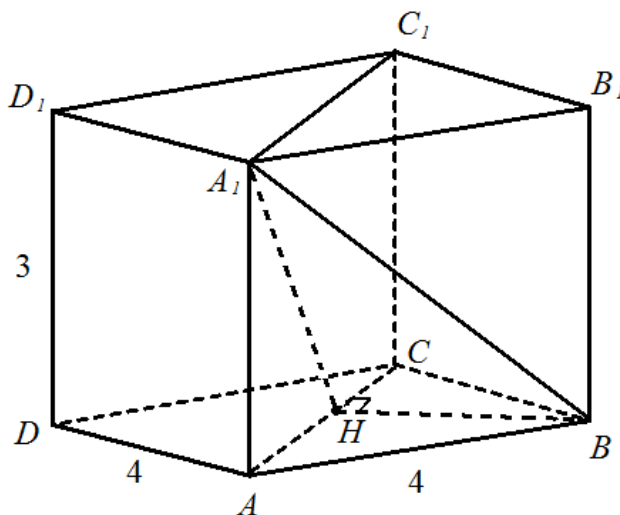
Если $\cos y > 0$, то из первого уравнения находим: $x = 3$ или $x = -\frac{1}{2}$.

При $x = 3$ второе уравнение не имеет решений, а при $x = -\frac{1}{2}$, учитывая условие $\cos y > 0$, получаем: $y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $((-1)^k; \frac{\pi}{2} + \pi k), (-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $AA_1 C$ и прямой $A_1 B$, если $AA_1 = 3, AB = 4, BC = 4$.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC . $A_1 H$ – проекция $A_1 B$ на плоскость $AA_1 C$. Значит, нужно найти угол $BA_1 H$.



В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = 2\sqrt{2}$.

В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin A_1 = \frac{BH}{A_1B} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

C3

Решите неравенство $\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geq 2\log_2 x$.

Сделаем замену: $y = \log_2 x$. Получаем: $\frac{y-5}{1-2y} \geq 2y$; $\frac{4y^2 - y - 5}{2y-1} \leq 0$;

$$\frac{(y+1)(4y-5)}{2y-1} \leq 0.$$

Тогда $y \leq -1$ или $\frac{1}{2} < y \leq \frac{5}{4}$.

Сделаем обратную замену: $\begin{cases} \log x \leq -1, \\ 0,5 < \log x \leq 1,25; \end{cases} \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2} < x \leq \sqrt[4]{32}. \end{cases}$

Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\sqrt{2} < x \leq \sqrt[4]{32}$.

C4

В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F . Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF .

Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит, $S_{AEF} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_{AED} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} S_{ABD} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{10} S_{ABC}$.

Ответ: 0,1.

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|$.

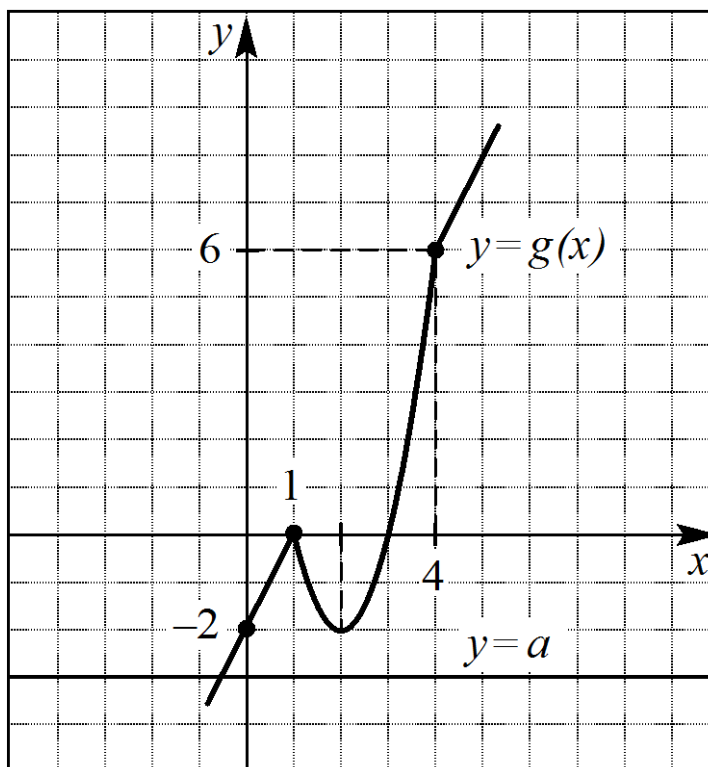


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x \leq 1$ или $x \geq 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, и $g(x) = 2x - 2$.

Если $1 < x < 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$, и $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех корней, только если $a \leq g(2)$ или $a \geq g(1)$.

$$g(2) = -2; g(1) = 0.$$

Ответ: $a \leq -2, a \geq 0$.

С6 Найдите все пары натуральных чисел m и n , являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

При любом k число $3^{2k} + 1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1} + 1$ – остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n + 1 = 2^m$, только если $m = 1$ или $m = 2$ (если $m \geq 3$, то 2^m делится на 8 без остатка).

Если $m = 1$, то получаем уравнение $3^n = 1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m = 2$, то получаем уравнение $3^n = 3$, которое имеет натуральное решение $n = 1$.

Ответ: $m = 2, n = 1$.