B1	B2	B3	B4	B5	B6
6	18	-4	6	58500	9
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
2	40	36	35	2	12

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

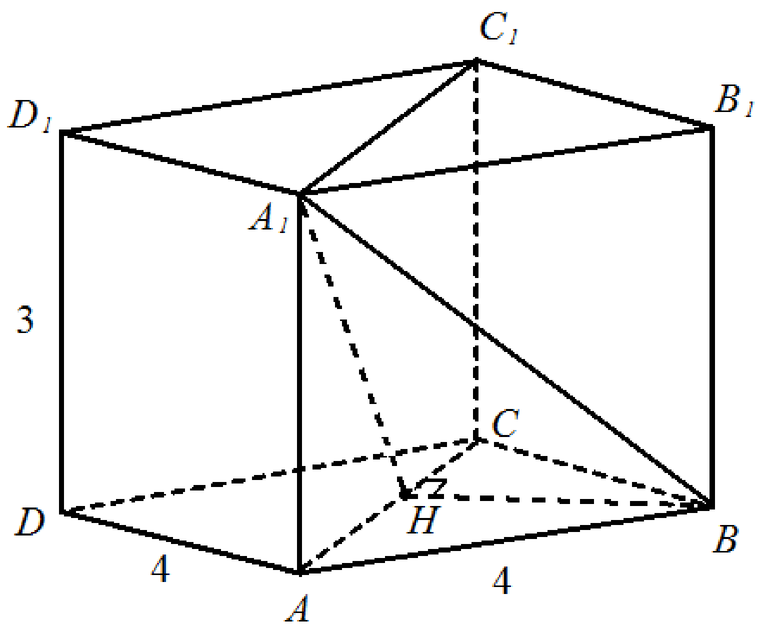
Из второго уравнения находим: $\sin^2 x - \sin^2 y = 0$. Учитывая, что $\sin x - \sin y = 1$, получаем систему:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin x + \sin y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin x = 1, \\ 2\sin y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi;\ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi),\ n \in Z,\ k \in Z$.

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

Из точки B проведем перпендикуляр BH к AC. A_1H – проекция A_1B на плоскость AA_1C. Значит, нужно найти угол BA_1H.



В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = 2\sqrt{2}$.
В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin A_1 = \dfrac{BH}{A_1B} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

C3 Решите неравенство $\log_2(x^2-4) - 3\log_2\dfrac{x+2}{x-2} > 2$.

Из неравенства следует, что либо $x > 2$, либо $x < -2$.
Если $x > 2$, то неравенство принимает вид $\log_2(x+2) - 2\log_2(x-2) < -1$;

$\log_2 2(x+2) < \log_2(x-2)^2$;

$2x+4 < (x-2)^2$;

$x^2 - 6x > 0$;

$x(x-6) > 0$.

Учитывая, что $x > 2$, получаем: $x > 6$.

Если $x < -2$, то неравенство принимает вид $\log_2(-x-2) - 2\log_2(2-x) < -1$;

$\log_2 2(-x-2) < \log_2(2-x)^2$;

$-2x-4 < (2-x)^2$;

$x^2 - 2x + 8 > 0$.

Полученное неравенство выполняется при всех x.

Ответ: $x < -2$ или $x > 6$.

C4 В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.

Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит, $S_{AEF5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 S_{AED} = \dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{5}{6}S_{ABD} = \dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{3}S_{ABC} = \dfrac{1}{10}S_{ABC}$.

Ответ: 0,1.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$.

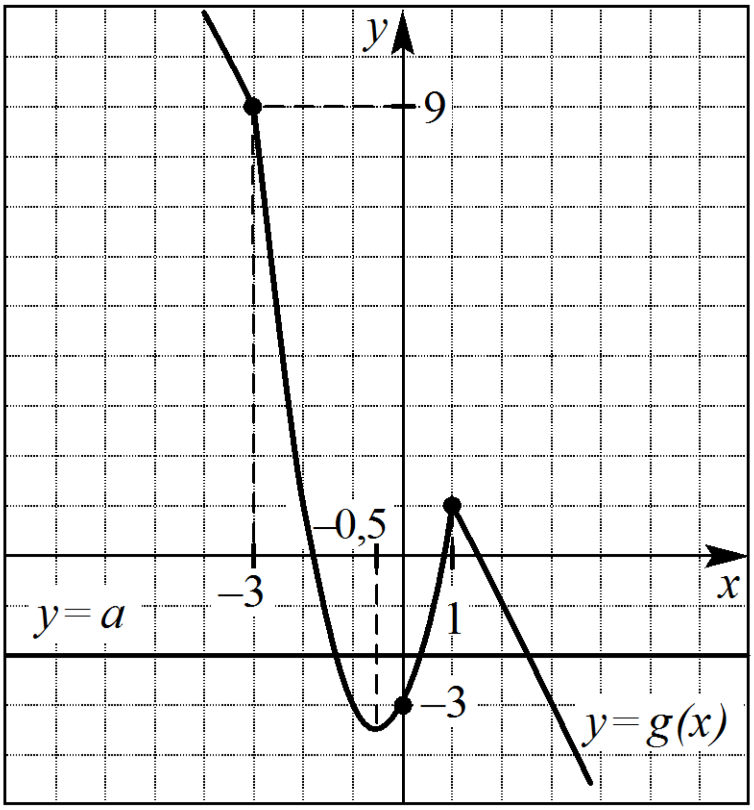


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трех или более точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет более двух различных корней.

Если $x \le -3$ или $x \ge 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3$, и $g(x) = -2x + 3$.

Если $-3 < x < 1$, то $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$, и $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней, только если $g(-\frac{1}{2}) < a < g(1)$.

$g(-\frac{1}{2}) = -3{,}5$; $g(1) = 1$.

Ответ: $-3{,}5 < a < 1$.

C6 Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

При любом k число $3^{2k} + 1$ дает остаток 2, а число $3^{2k-1} + 1$ – остаток 4 при делении на 8. Значит, $3^n + 1 = 2^m$, только если $m = 1$ или $m = 2$ (если $m \geq 3$, то 2^m делится на 8 без остатка).

Если $m = 1$, то получаем уравнение $3^n = 1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m = 2$, то получаем уравнение $3^n = 3$, которое имеет натуральное решение $n = 1$.

Ответ: $m = 2$, $n = 1$.