Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом.

С1 Дано уравнение $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

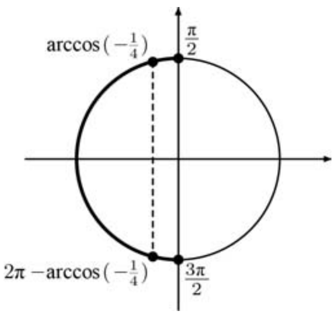
$$4\sin x\cos x - 4\cos x + \sin x - 1 = 0;$$

$$(\sin x - 1)(4\cos x + 1) = 0.$$

Получаем: $\sin x = 1$ или $\cos x = -\frac{1}{4}$;

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \ \text{ или } \ x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке: $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: $\frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$, $2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in Z;$ б) $\frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$, $2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Верно решено уравнение и произведён отбор корней	2
Верно решено уравнение, но не произведён или не обоснован отбор корней, принадлежащих данному отрезку, или верно указаны все корни, принадлежащие данному отрезку, но решение простейших тригонометрических уравнений не доведено до конца	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

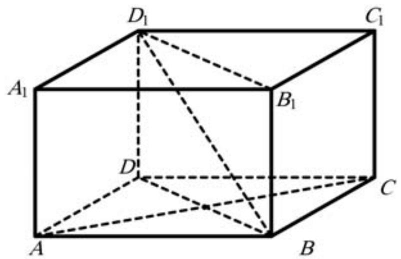
С2 Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=12$, $AD=5$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равна 13.

Решение.

Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно расстоянию между основаниями, то есть высоте призмы. Значит, высота призмы равна 13.

Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому искомый угол равен углу между ребром DD_1 и прямой BD_1.

Рассмотрим треугольник BDD_1. Его катеты равны $DD_1 = 13$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13$. Значит, $\angle BD_1D = 45^\circ$.



Ответ: 45°.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему

$$\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}, \\ \log_2^2 x + 6 \ge 5\log_2 x. \end{cases}$$

Решение.
Решим первое неравенство. Приведем второе слагаемое к основанию 3:

$$x^{\log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = 3^{\log_3^2 x}.$$

Неравенство принимает вид

$$2 \cdot 3^{\log_3^2 x} > 2\sqrt[4]{3}; \quad 3^{\log_3^2 x} > 3^{0,25}; \quad \left|\log_3 x\right| > \frac{1}{2}.$$

Получаем: $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ или $x > \sqrt{3}$.

Решим второе неравенство как квадратное относительно $\log_2 x$:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \ge 0.$$

Получаем: $\log_2 x \le 2$ или $\log_2 x \ge 3$.Следовательно, $0 < x \le 4$ или $x \ge 8$.
Чтобы получить решение системы, найдем общую часть решений неравенств:

$$0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3} < x \le 4; \quad x \ge 8.$$

Ответ: $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3} < x \le 4$, $x \ge 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Для обоих неравенств системы обоснованно получены верные ответы, но решение системы не найдено или найдено неверно	2
Для одного из двух неравенств системы обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами AC=15 и BC=8. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.
Обозначим $\angle BAC$=α. Тогда

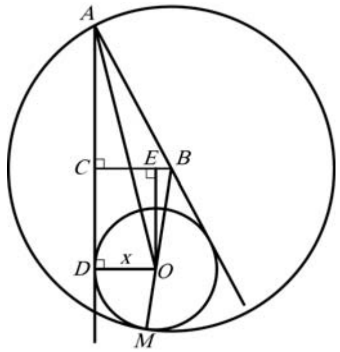
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}, \quad \cos\alpha = \frac{15}{17}, \quad \sin\alpha = \frac{8}{17}.$$

Пусть x - радиус искомой окружности, O – ее центр, D– точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E– проекция точки O на прямую BC.
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$\operatorname{ctg}\angle OAD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = 4.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

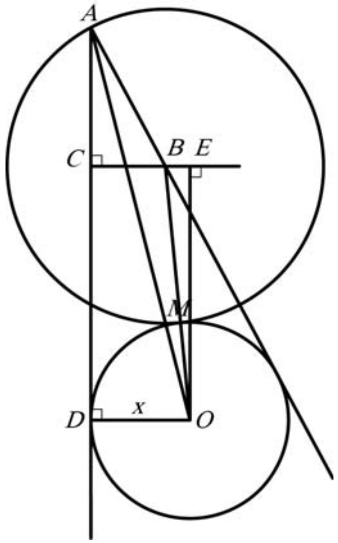
$$AD = OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 4x.$$



Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: одна из них касается окружности S внутренним образом (рис. 1), а вторая – внешним (рис. 2).

В первом случае

$$BO = BM - OM = 17 - x, \quad OE = CD = |AD - AC| = |4x - 15|,$$
$$BE = |BC - CE| = |BC - OD| = |8 - x|.$$



По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$$(17-x)^2 = (4x-15)^2 + (8-x)^2, \quad 16x^2 - 102x = 0,$$

откуда находим, что $x = \dfrac{51}{8}$.

Во втором случае

$BO = BM + MO = 17 + x, \quad OE = CD = |AD - AC| = |4x - 15|,$
$BE = |CE - BC| = |OD - BC| = |x - 8|$.

Тогда

$$(17+x)^2 = (4x-15)^2 + (x-8)^2, \quad 16x^2 - 170x = 0,$$

откуда находим, что $x = \dfrac{85}{8}$.

Ответ: $\dfrac{51}{8}$ или $\dfrac{85}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом.

C1 Дано уравнение $\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

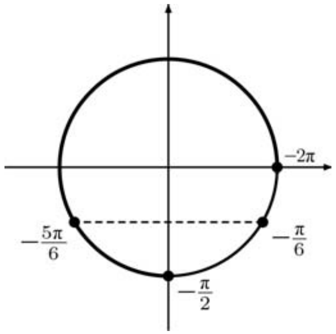
$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0;$$

$(\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0.$

Получаем: $\cos x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$;

$$x = 2\pi k,\ k \in Z,\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \text{ или } x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$: -2π, $-\frac{5\pi}{6}$.



Ответ: а) $x = 2\pi k,\ k \in Z,\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z,\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$; б) $-2\pi,\ -\frac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно решено уравнение и произведён отбор корней	2
Верно решено уравнение, но не произведён или не обоснован отбор корней, принадлежащих данному отрезку, или верно указаны все корни, принадлежащие данному отрезку, но решение простейших тригонометрических уравнений не доведено до конца	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

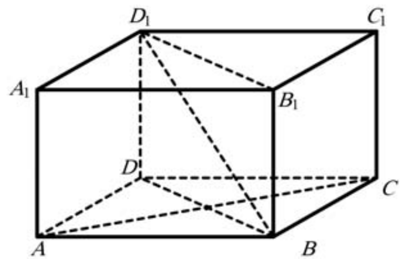
C2 Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=5$, $AD=\sqrt{11}$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно $2\sqrt{3}$.

Решение.

Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно расстоянию между основаниями, то есть высоте призмы. Значит, высота призмы равна $2\sqrt{3}$.

Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому искомый угол равен углу между ребром DD_1 и прямой BD_1.

Рассмотрим треугольник BDD_1. Его катеты равны $DD_1 = 2\sqrt{3}$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 6$. Значит, $\angle BD_1D = \operatorname{arctg}\frac{6}{2\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ$.



Ответ: 60°.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему

$$\begin{cases} 5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \geq 2\sqrt[4]{5}, \\ \log_3^2 x + 2 > 3\log_3 x. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Приведем второе слагаемое к основанию 5:

$$x^{\log_5 x} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x} = 5^{\log_5^2 x}.$$

Неравенство принимает вид

$$2 \cdot 5^{\log_5^2 x} \geq 2\sqrt[4]{5}; \quad 5^{\log_3^2 x} \geq 5^{0,25}; \ \left|\log_5 x\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Получаем: $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ или $x \geq \sqrt{5}$.

Решим второе неравенство как квадратное относительно $\log_3 x$:

$$\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 > 0.$$

Получаем: $\log_3 x < 1$ или $\log_3 x > 2$.Следовательно, $0 < x < 3$ или $x > 9$.

Чтобы получить решение системы, найдем общую часть решений неравенств:

$$0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}; \ \sqrt{5} \leq x < 3; \ x > 9.$$

Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{5} \leq x < 3$, $x > 9$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Для обоих неравенств системы обоснованно получены верные ответы, но решение системы не найдено или найдено неверно	2
Для одного из двух неравенств системы обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=5$ и $BC=12$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 13. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{5}{13}, \quad \sin\alpha = \frac{12}{13}.$$

Пусть x – радиус искомой окружности, O – ее центр, D – точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E – проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$\operatorname{ctg}\angle OAD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{3}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}x.$$

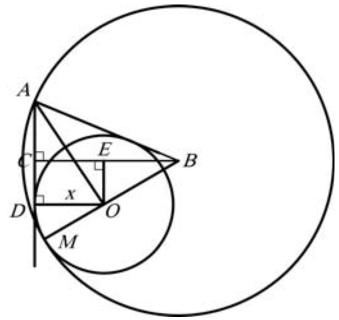
Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: одна из них касается окружности S внутренним образом (рис. 1), а вторая – внешним (рис. 2).

В первом случае

$$BO = BM - OM = 13 - x,$$

$$OE = CD = \left| AD - AC \right| = \left| \frac{3}{2}x - 5 \right|,$$

$$BE = | BC - CE | = | BC - OD | = | 12 - x | .$$



По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или

$$\left(13 - x\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 + \left(12 - x\right)^2, \quad \frac{9}{4}x^2 - 13x = 0,$$

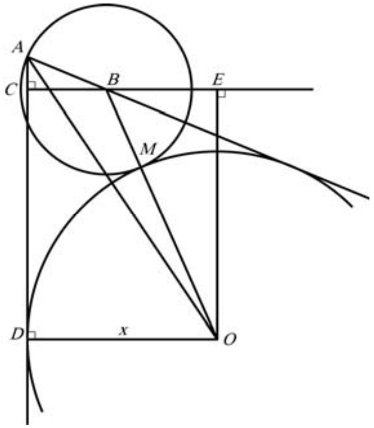
откуда находим, что $x = \dfrac{52}{9}$.

Во втором случае

$$BO = BM + MO = 13 + x,$$

$$OE = CD = \left| AD - AC \right| = \left| \frac{3}{2}x - 5 \right|,$$

$$BE = | CE - BC | = | OD - BC | = | 12 - x | .$$



Тогда

$$\left(13 + x\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 + \left(12 - x\right)^2, \quad \frac{9}{4}x^2 - 65x = 0.$$

Откуда находим, что $x = \dfrac{260}{9}$.

Ответ: $\dfrac{52}{9}$ или $\dfrac{260}{9}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	62
B2	8
B3	4,5
B4	347
B5	-124
B6	70
B7	0,5

№ задания	Ответ
B8	-0,75
B9	15
B10	0,4
B11	144
B12	10000
B13	15
B14	-6

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	0,4
B2	465
B3	49
B4	292
B5	-77
B6	47
B7	0,2

№ задания	Ответ
B8	0,5
B9	24
B10	0,4
B11	16
B12	700
B13	20
B14	9