Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.

Без производной

Вариант 13

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
8	13400	-4	0,4	7245	12
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
162	3	8	6	13	60

Вариант 14

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
20	13400	2	0,9	2700	12
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
50	2	8	12,5	4	48

Вариант 15

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
81	13400	-1	15	162300	12
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
81	4	8	7	6	6

Вариант 15

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
8	13400	8	21	208400	26
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
16	3	8	6,25	7	7

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6

Вариант 13, 15

С1 Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4\sin x - 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x = 0,$ откуда $\sin x = \dfrac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = \dfrac{1}{2}$, то

$y = 4\sin x - 3 = -1$; тогда $y + 1 = 0$.

что невозможно, так как иначе в знаменателе дроби стоит 0.

3. Если $\sin x = -1$, то

$y = 4\sin x - 3 = -7$; тогда $y + 1 < 0$. Это невозможно.

4. Если $\sin x = 1$, то

$y = 4\sin x - 3 = 1$, тогда $y + 1 > 0$,

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \quad y = 1$.

Критерии:

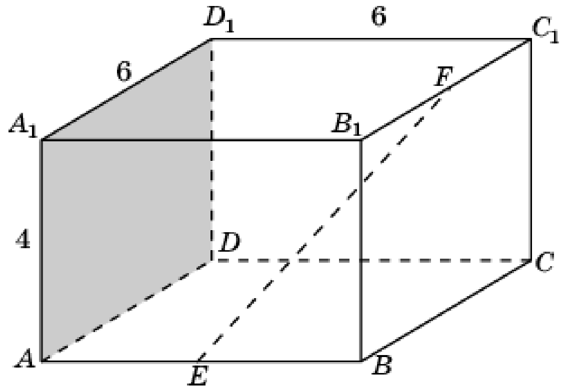
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

Решение.

Найдем угол между прямой EF и плоскостью грани BB_1C_1C. Точка B - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол есть $\angle EFB$. $EB = \frac{6}{2} = 3$. $FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\operatorname{tg}\angle EFB = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство

$$\log_x(7-x)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right)-\log_x(x-1).$$

Решение.

$$\log_x(7-x)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right)-\log_x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x(7-x)(x-1)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right)\\ x>1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\cdot(7-x)<x^3-6x^2+14x-7\\ 1<x<7\end{cases}$$

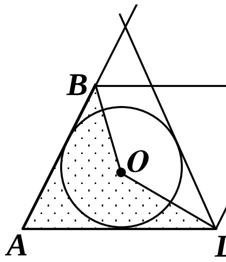
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-5x^2+6x>0\ \ (\Leftrightarrow x(x-2)(x-3)>0)\\ 1<x<7\end{cases}$$

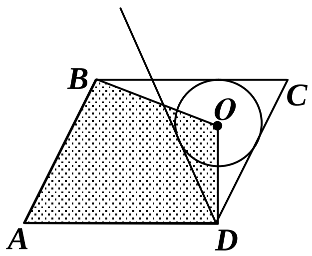
Ответ: $1<x<2,\ 3<x<7$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены значения переменной, при которых логарифмируемые выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB=2$, $BC=3$, $\angle A=60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.





Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r = \frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площадь параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{13\sqrt{3}}{6}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}\geq 0, \\ x-8>ax \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1-a)x>8.$$

Если $a=1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a<1$, то решение неравенства – луч $x>\dfrac{8}{1-a}$.

Если $a>1$, то решение неравенства – луч $x<\dfrac{8}{1-a}$.

При $a\neq 1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1-a)(x-\dfrac{a}{1-a})(x-2(1-a))\geq 0, \\ x\neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a<1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках $\dfrac{a}{1-a}$, $2(1-a)$.

Если $a>1$, то решение этой системы –полуинтервал с концами в точках $\dfrac{a}{1-a}$, $2(1-a)$.

Отметим, что точки $x=2(1-a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a\neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a\geq 1, \\ \dfrac{a}{1-a}\geq\dfrac{8}{1-a}, \\ 2(1-a)\geq\dfrac{8}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\leq a\leq 8, \\ (1-a)^2\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq a\leq 3$$

Ответ: $1\leq a\leq 3$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.

3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

С6 Последние члены двух конечных арифметических прогрессий

$$a_1 = 5,\ a_2 = 8, \ldots,\ a_N \quad \text{и} \quad b_1 = 9,\ b_2 = 14,\ \ldots, b_M$$

совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение. Ясно, что

$$a_m = 5 + 3(m-1), m = 1, \ldots, N$$

$$b_k = 9 + 5(k-1), k = 1, \ldots, M$$

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению

$$5 + 3(m-1) = 9 + 5(k-1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2.$$

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому

$$k = 3n - 1, 3m = 15n - 3,$$

где $1 \le n \le L.$

Найдём L. Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним – равным $15L - 1$.

Значит,

$$\frac{14+15L-1}{2} L = 815 \Leftrightarrow 15L^2 + 13L - 1630 = 0.$$

Откуда $L = 10$. Поэтому $M = 5L - 1 = 29, N = 3L - 1 = 49.$

Ответ: 49 и 29.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы

Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно указана арифметическая прогрессия общих членов.	3
Ответ неверен, однако есть попытка доказать, что общие члены прогрессий образуют арифметическую прогрессию.	2
Общие члены арифметических прогрессий находятся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6
Варианты 14, 16

С1 Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4\sin x + 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 1)\cos x = 0$, откуда $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, то
$y = 4\sin x + 3 = 1$, тогда $y - 1 = 0$, что невозможно.

3. Если $\sin x = -1$, то
$y = 4\sin x + 3 = -1$, тогда $y - 1 < 0$, что невозможно.

4. Если $\sin x = 1$, то
$y = 4\sin x + 3 = 7$, тогда $y - 1 > 0$,

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\quad y = 7$.

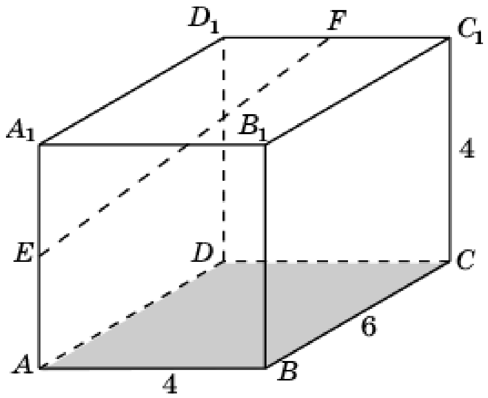
Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1.

Решение.

Будем искать угол между прямой EF и плоскостью грани $A_1B_1C_1D_1$. Точка A_1 - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол $\angle EFA_1$. $A_1E = \frac{4}{2} = 2$. $A_1F = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

$\operatorname{tg}\angle EFA_1 = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство

$$\log_x(5-x) < \log_x\left(x^3 - 7x^2 + 14x - 5\right) - \log_x(x-1).$$

Решение.

$$\log_x(5-x)<\log_x\left(x^3-7x^2+14x-5\right)-\log_x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x(5-x)(x-1)<\log_x\left(x^3-7x^2+14x-5\right)\\ x>1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\cdot(5-x)<x^3-7x^2+14x-5\\ 1<x<5\end{cases}$$

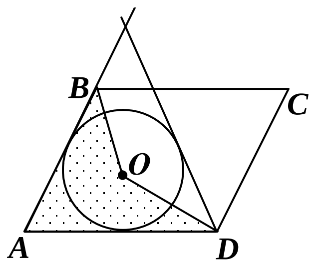
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-6x^2+8x>0\ \ (\Leftrightarrow x(x-2)(x-4)>0)\\ 1<x<5\end{cases}$$

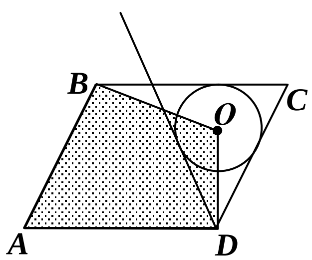
Ответ: $1<x<2,\ 4<x<5.$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены значения переменной, при которых логарифмируемые выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB=3$, $BC=5$, $\angle A=60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.





Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r=\dfrac{5\cdot\sin 60^\circ}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}AD\cdot r=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r=\dfrac{3\cdot\sin 60^\circ}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площадь параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD}=AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ-\frac{1}{2}BC\cdot r-\frac{1}{2}CD\cdot r=\frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{3}}{3},\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\dfrac{x-ax-a}{x-2+2a}\geq 0,\\ x-8>ax\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1-a)x>8.$$

Если $a=1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a<1$, то решение неравенства – луч $x>\frac{8}{1-a}$.

Если $a>1$, то решение неравенства – луч $x<\frac{8}{1-a}$.

При $a\neq 1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases}(1-a)(x-\frac{a}{1-a})(x-2(1-a))\geq 0,\\ x\neq 2(1-a)\end{cases}$$

Если $a<1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках $\frac{a}{1-a}$, $2(1-a)$.

Если $a>1$, то решение этой системы –полуинтервал с концами в точках $\frac{a}{1-a}$, $2(1-a)$.

Отметим, что точки $x=2(1-a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a\neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases}a\geq 1,\\ \frac{a}{1-a}\geq\frac{8}{1-a},\\ 2(1-a)\geq\frac{8}{1-a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leq a\leq 8,\\ (1-a)^2\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow 1\leq a\leq 3$$

Ответ: $1\leq a\leq 3$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

С6 Последние члены двух конечных арифметических прогрессий

$$a_1 = 5,\ a_2 = 8, \ldots,\ a_N \quad \text{и} \quad b_1 = 9,\ b_2 = 14,\ \ldots, b_M$$

совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение. Ясно, что

$$a_m = 5 + 3(m-1),\, m = 1, \ldots, N$$

$$b_k = 9 + 5(k-1),\, k = 1, \ldots, M$$

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению

$5 + 3(m-1) = 9 + 5(k-1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2.$

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому

$$k = 3n - 1, 3m = 15n - 3,$$

где $1 \le n \le L.$

Найдём L. Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним – равным $15L - 1$.

Значит,

$$\frac{14 + 15L - 1}{2} L = 815 \Leftrightarrow 15L^2 + 13L - 1630 = 0.$$

Откуда $L = 10$. Поэтому $M = 5L - 1 = 29, N = 3L - 1 = 49.$

Ответ: 49 и 29.

Критерии:

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ неверен из-за арифметической ошибки, но правильно указана арифметическая прогрессия общих членов.	3
Ответ неверен, однако есть попытка доказать, что общие члены прогрессий образуют арифметическую прогрессию.	2
Общие члены арифметических прогрессий находятся прямым перебором с ошибками. Ответ отсутствует или неверен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0