

**Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.**

Ответы к части В

Вариант 9

В1	В2	В3	В4	В5	В6
4	13400	7	12	1840	10
В7	В8	В9	В10	В11	В12
243	2	8	5	14	12

Вариант 10

В1	В2	В3	В4	В5	В6
31	13400	4	0,5	6465	6
В7	В8	В9	В10	В11	В12
33	3	8	30	7	8

Вариант 11

В1	В2	В3	В4	В5	В6
19	13400	-3	0,9	154700	8
В7	В8	В9	В10	В11	В12
28	2	8	11	3	8

Вариант 12

В1	В2	В3	В4	В5	В6
8	13400	2	18	189900	12
В7	В8	В9	В10	В11	В12
49	3	8	10	5	13

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6

Варианты 9, 11

C1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4 \sin x - 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x - 1) \cos x = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = -1; \text{ тогда } y + 1 = 0.$$

что невозможно, так как иначе в знаменателе дроби стоит 0.

3. Если $\sin x = -1$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = -7; \text{ тогда } y + 1 < 0. \text{ Это невозможно.}$$

4. Если $\sin x = 1$, то

$$y = 4 \sin x - 3 = 1, \text{ тогда } y + 1 > 0,$$

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 1.$

Критерии:

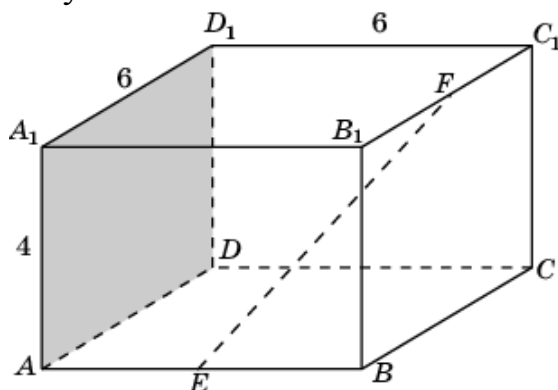
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1 D_1 = 6$, $C_1 D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и $B_1 C_1$.

Решение.

Найдем угол между прямой EF и плоскостью грани BB_1C_1C . Точка B - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол есть $\angle EFB$. $EB = \frac{6}{2} = 3$. $FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\operatorname{tg} \angle EFB = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3

Решите неравенство

$$\log_x (7-x) < \log_x (x^3 - 6x^2 + 14x - 7) - \log_x (x-1).$$

Решение.

$$\log_x (7-x) < \log_x (x^3 - 6x^2 + 14x - 7) - \log_x (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_x (7-x)(x-1) < \log_x (x^3 - 6x^2 + 14x - 7) \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (7-x) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \\ 1 < x < 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \quad (\Leftrightarrow x(x-2)(x-3) > 0) \\ 1 < x < 7 \end{cases}$$

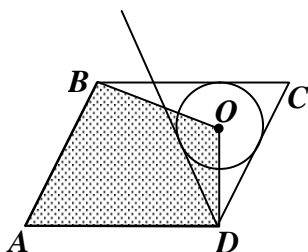
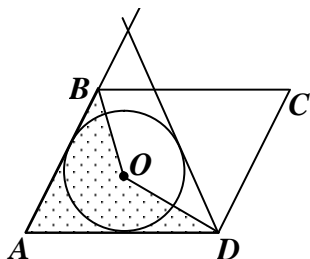
Ответ: $1 < x < 2, 3 < x < 7$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены значения переменной, при которых логарифмируемые выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.



Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты

правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r = \frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{13\sqrt{3}}{6}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x+ax+a}{x-2a-2} \geq 0, \\ x+ax > 8 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы $(1+a)x > 8$.

Если $a = -1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a > -1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1+a}$.

Если $a < -1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1+a}$.

При $a \neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1+a)\left(x + \frac{a}{1+a}\right)(x - 2(1+a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a > -1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$$-\frac{a}{1+a}, 2(1+a).$$

Если $a < -1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$$-\frac{a}{1+a}, 2(1+a).$$

Отметим, что точки $x = 2(1+a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq -1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \leq -1, \\ -\frac{a}{1+a} \geq \frac{8}{1+a}, \\ 2(1+a) \geq \frac{8}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq a \leq -1, \\ (1+a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq a \leq -1$$

Ответ: $-3 \leq a \leq -1$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

С6

Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

Решение. Наименьшее общее кратное чисел, составляющих множество A , равно $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поэтому числа, составляющие множество A – это делители 210. Всего делителей 16:

$$1, 2, 3, 5, 7, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Каждый делитель содержит не более одного множителя 2. А произведение всех чисел из A делится $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Поэтому среди чисел, составляющих A , должно быть, по крайней мере семь чётных, а их всего восемь:

$$2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Если число 2 входит в A , то любое другое число из A должно делиться на 2. Значит,

$$A = \{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\},$$

но произведение этих чисел равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2)^2$.

Значит, 2 не входит в A , а числа

$$2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

входят в A , но их всего семь. Поэтому этот набор нужно расширить, добавляя делители 210, не взаимно простые со всеми указанными семью числами. Такой делитель единственный – число $3 \cdot 5 \cdot 7$.

Ответ: $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован, однако правильно выбраны семь чётных чисел, входящих в искомое множество.	3
Ответ может быть даже не сформулирован, однако указано, что числа, составляющие искомое множество – это делители 210 и по крайней мере семь из них – чётные.	2
Ответа нет, однако предложен «разумный» перебор.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

**Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.**

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6

Варианты 10,12

С1

Решите систему

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4 \sin x + 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x + 1) \cos x = 0$, откуда $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то

$y = 4 \sin x + 3 = 1$, тогда $y - 1 = 0$, что невозможно.

3. Если $\sin x = -1$, то

$y = 4 \sin x + 3 = -1$, тогда $y - 1 < 0$, что невозможно.

4. Если $\sin x = 1$, то

$y = 4 \sin x + 3 = 7$, тогда $y - 1 > 0$,

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 7$.

Критерии:

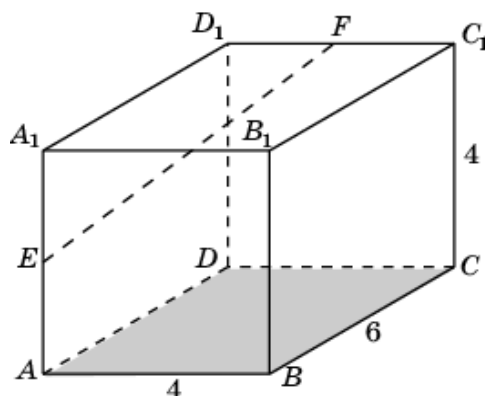
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и $C_1 D_1$.

Решение.

Будем искать угол между прямой EF и плоскостью грани $A_1B_1C_1D_1$. Точка A_1 - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол $\angle EFA_1$. $A_1E = \frac{4}{2} = 2$. $A_1F = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

$$\operatorname{tg} \angle EFA_1 = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3

Решите неравенство

$$\log_x (5-x) < \log_x (x^3 - 7x^2 + 14x - 5) - \log_x (x-1).$$

Решение.

$$\log_x (5-x) < \log_x (x^3 - 7x^2 + 14x - 5) - \log_x (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_x (5-x)(x-1) < \log_x (x^3 - 7x^2 + 14x - 5) \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (5-x) < x^3 - 7x^2 + 14x - 5 \\ 1 < x < 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x > 0 \quad (\Leftrightarrow x(x-2)(x-4) > 0) \\ 1 < x < 5 \end{cases}$$

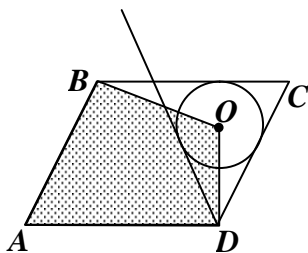
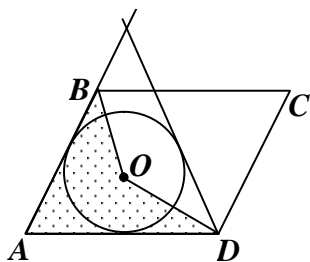
Ответ: $1 < x < 2, 4 < x < 5$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены значения переменной, при которых логарифмируемые выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.



Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты

правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD :

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} AD \cdot r = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC :

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x+ax+a}{x-2a-2} \geq 0, \\ x+ax > 8 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы $(1+a)x > 8$.

Если $a = -1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a > -1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1+a}$.

Если $a < -1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1+a}$.

При $a \neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1+a)(x+\frac{a}{1+a})(x-2(1+a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a > -1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$$-\frac{a}{1+a}, 2(1+a).$$

Если $a < -1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$$-\frac{a}{1+a}, 2(1+a).$$

Отметим, что точки $x = 2(1+a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq -1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \leq -1, \\ -\frac{a}{1+a} \geq \frac{8}{1+a}, \\ 2(1+a) \geq \frac{8}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq a \leq -1, \\ (1+a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq a \leq -1$$

Ответ: $-3 \leq a \leq -1$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

С6

Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы.

Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

Решение. Наименьшее общее кратное чисел, составляющих множество A , равно $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поэтому числа, составляющие множество A – это делители 210. Всего делителей 16:

1, 2, 3, 5, 7, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $5 \cdot 7$, $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 3 \cdot 7$, $2 \cdot 5 \cdot 7$, $3 \cdot 5 \cdot 7$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Каждый делитель содержит не более одного множителя 2. А произведение всех чисел из A делится $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Поэтому среди чисел, составляющих A , должно быть, по крайней мере семь чётных, а их всего восемь:

Если число 2 входит в A , то любое другое число из A должно делиться на 2. Значит,

$$A = \{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\},$$

но произведение этих чисел равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2)^2$.

Значит, 2 не входит в A , а числа

$$2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

входят в A , но их всего семь. Поэтому этот набор нужно расширить, добавляя делители 210, не взаимно простые со всеми указанными семью числами. Такой делитель единственный – число $3 \cdot 5 \cdot 7$.

Ответ: $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован, однако правильно выбраны семь чётных чисел, входящих в искомое множество.	3
Ответ может быть даже не сформулирован, однако указано, что числа, составляющие искомое множество – это делители 210 и по крайней мере семь из них – чётные.	2
Ответа нет, однако предложен «разумный» перебор.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0