Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.

Ответы к части В

Вариант 1

В1	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**	**В6**
4	13400	7	12	1840	10
В7	**В8**	**В9**	**В10**	**В11**	**В12**
243	-0,25	8	5	3	12

Вариант 2

В1	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**	**В6**
31	13400	18	0,5	6465	6
В7	**В8**	**В9**	**В10**	**В11**	**В12**
33	-0,75	8	30	5	8

Вариант 3

В1	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**	**В6**
19	13400	-22	0,9	154700	8
В7	**В8**	**В9**	**В10**	**В11**	**В12**
28	0,5	8	11	8	8

Вариант 4

В1	**В2**	**В3**	**В4**	**В5**	**В6**
8	13400	-7	18	189900	12
В7	**В8**	**В9**	**В10**	**В11**	**В12**
49	-1,5	8	10	3	13

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6

Варианты 1, 3

С1 Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0, \\ y = 4\sin x - 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)\cos x = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то

$y = 4\sin x - 3 = -1$; тогда $y + 1 = 0$.

что невозможно, так как иначе в знаменателе дроби стоит 0.

3. Если $\sin x = -1$, то

$y = 4\sin x - 3 = -7$; тогда $y + 1 < 0$. Это невозможно.

4. Если $\sin x = 1$, то

$y = 4\sin x - 3 = 1$, тогда $y + 1 > 0$,

и в этом случае получаются решения системы.

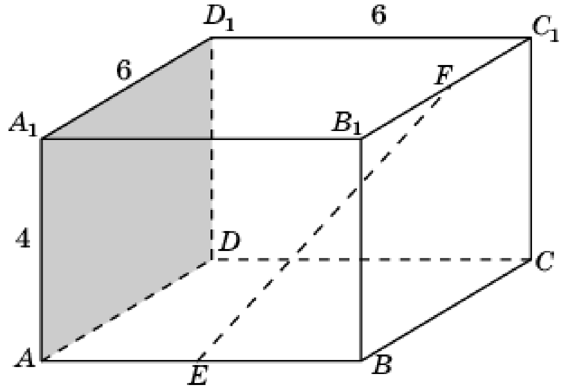
Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in ў,\quad y = 1$**.**

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

Решение. Найдем угол между прямой EF и плоскостью грани BB_1C_1C. Точка B - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол есть $\angle EFB$. $EB = \frac{6}{2} = 3$. $FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\operatorname{tg} \angle EFB = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(7-x) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \\ 1 < x \le 7 \end{cases}$$

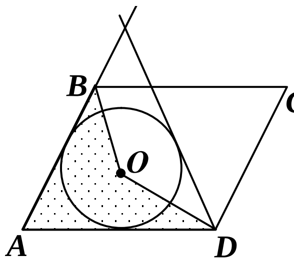
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \ \ (\Leftrightarrow x(x-2)(x-3) > 0) \\ 1 < x \le 7 \end{cases}$$

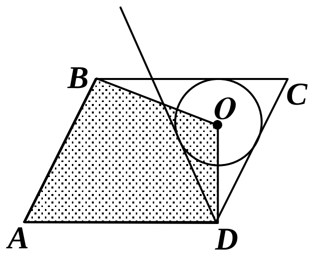
Ответ: $1 < x < 2,\ 3 < x \le 7$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 Дан параллелограмм $ABCD,\ AB=2,\ BC=3,\ \angle A=60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.





Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r=\dfrac{3\cdot\sin 60^\circ}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}AD\cdot r=\frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r=\dfrac{2\cdot\sin 60^\circ}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площадь параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD}=AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ-\frac{1}{2}BC\cdot r-\frac{1}{2}CD\cdot r=\frac{13\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{3}}{4},\dfrac{13\sqrt{3}}{6}.$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x+ax+a}{x-2a-2}\geq 0, \\ x+ax>8 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1+a)x>8.$$

Если $a=-1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a>-1$, то решение неравенства – луч $x>\dfrac{8}{1+a}$.

Если $a<-1$, то решение неравенства – луч $x<\dfrac{8}{1+a}$.

При $a\neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1-a)\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\left(x-2(1-a)\right)\geq 0, \\ x\neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a>-1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$-\dfrac{a}{1+a}$, $2(1+a)$.

Если $a<-1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$-\dfrac{a}{1+a}$, $2(1+a)$.

Отметим, что точки $x=2(1+a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq -1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a \le -1, \\ -\dfrac{a}{1+a} \ge \dfrac{8}{1+a}, \\ 2(1+a) \ge \dfrac{8}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \le a \le -1, \\ (1+a)^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le a \le -1$$

Ответ: $-3 \le a \le -1$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

С6 Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

Решение. Наименьшее общее кратное чисел, составляющих множество A, равно $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поэтому числа, составляющие множество A – это делители 210. Всего делителей 16:

$$1, 2, 3, 5, 7, 2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 3\cdot 5, 3\cdot 7, 5\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5, 2\cdot 3\cdot 7, 2\cdot 5\cdot 7, 3\cdot 5\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

Каждый делитель содержит не более одного множителя 2. А произведение всех чисел из A делится $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Поэтому среди чисел, составляющих A, должно быть, по крайней мере семь чётных, а их всего восемь:

$$2, 2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5, 2\cdot 3\cdot 7, 2\cdot 5\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

Если число 2 входит в A, то любое другое число из A должно делится на 2. Значит,

$$A=\{2,6,10,14,30,42,70,210\},$$

но произведение этих чисел равно $2^8\cdot 3^4\cdot 5^4\cdot 7^4=(2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2)^2$.

Значит, 2 не входит в A, а числа

$$2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5, 2\cdot 3\cdot 7, 2\cdot 5\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

входят в A, но их всего семь. Поэтому этот набор нужно расширить, добавляя делители 210, не взаимно простые со всеми указанными семью числами. Такой делитель единственный – число $3\cdot 5\cdot 7$.

Ответ: $A=\{6,10,14,30,42,70,105,210\}$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован, однако правильно выбраны семь чётных чисел, входящих в искомое множество.	3
Ответ может быть даже не сформулирован, однако указано, что числа, составляющие искомое множество – это делители 210 и по крайней мере семь из них – чётные.	2
Ответа нет, однако предложен «разумный» перебор.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Диагностическая работа по математике.
11 класс. 19 ноября 2009 года.

Решения и критерии оценивания заданий С1-С6
Варианты 2, 4

C1 Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4\sin x + 3. \end{cases}$$

Решение.

1. $\sin 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 1)\cos x = 0$, откуда $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$.

2. Если $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, то
$y = 4\sin x + 3 = 1$, тогда $y - 1 = 0$, что невозможно.

3. Если $\sin x = -1$, то
$y = 4\sin x + 3 = -1$, тогда $y - 1 < 0$, что невозможно.

4. Если $\sin x = 1$, то
$y = 4\sin x + 3 = 7$, тогда $y - 1 > 0$,

и в этом случае получаются решения системы.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in ў,\quad y = 7$.

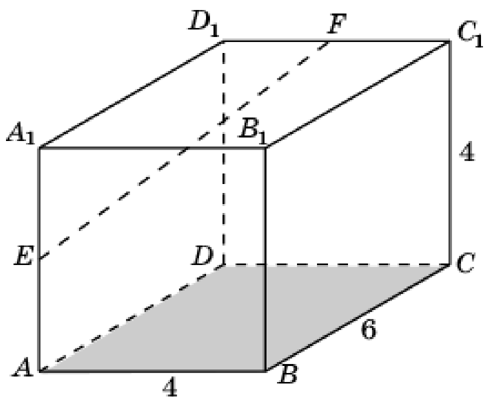
Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтена положительность подкоренного выражения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1.

Решение.

Будем искать угол между прямой EF и плоскостью грани $A_1B_1C_1D_1$. Точка A_1 - проекция точки E на эту плоскость.



Искомый угол $\angle EFA_1$. $A_1E = \dfrac{4}{2} = 2$. $A_1F = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$.

$\operatorname{tg}\angle EFA_1 = \dfrac{2}{2\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(5-x) < x^3 - 7x^2 + 14x - 5 \\ 1 < x \le 5 \end{cases}$$

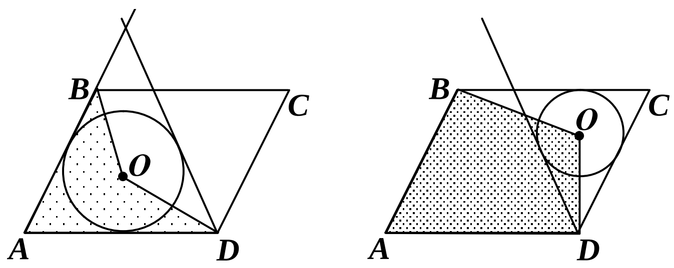
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x > 0 \ \ (\Leftrightarrow x(x-2)(x-4) > 0) \\ 1 < x \le 5 \end{cases}$$

Ответ: $1 < x < 2,\ 4 < x \le 5.$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ неточен или из-за арифметической ошибки, или из-за того, что в него включены (отброшены) значения переменной, при которых подкоренные выражения обращаются в ноль.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.



Решение. Окружностей две: каждая из них – вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 – соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r = \dfrac{5 \cdot \sin 60^\circ}{3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}.$

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}AD\cdot r=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r=\frac{3\cdot\sin 60^\circ}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площадь параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD}=AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ-\frac{1}{2}BC\cdot r-\frac{1}{2}CD\cdot r=\frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}, \frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\frac{x+ax+a}{x-2a-2}\geq 0,\\ x+ax>8\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1+a)x>8.$$

Если $a=-1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений.

Если $a > -1$, то решение неравенства – луч $x > \frac{8}{1+a}$.

Если $a < -1$, то решение неравенства – луч $x < \frac{8}{1+a}$.

При $a \neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1-a)\left(x-\frac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a))\geq 0, \\ x\neq 2(1-a) \end{cases}$$

Если $a > -1$, то решение этой системы – два луча с концами в точках

$-\frac{a}{1+a}$, $2(1+a)$.

Если $a < -1$, то решение этой системы – полуинтервал с концами в точках

$-\frac{a}{1+a}$, $2(1+a)$.

Отметим, что точки $x = 2(1+a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a\leq -1, \\ -\frac{a}{1+a}\geq \frac{8}{1+a}, \\ 2(1+a)\geq \frac{8}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\leq a\leq -1, \\ (1+a)^2\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq a \leq -1$$

Ответ: $-3 \leq a \leq -1$.

Критерии:

Балл	Характеристика решения задачи С5
4	Обоснованно получен верный ответ.
3	Либо получен верный ответ, но при его обосновании допущены ошибки, либо обоснованно получен ответ, отличный от верного только из-за потери (приобретения) одного–двух искомых значений параметра.
2	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдено хотя бы одно верное расположение луча и полуинтервала.
1	Ответ, возможно, отсутствует или неверен, но в решении с помощью верного рассуждения найдены некоторые из искомых значений параметра.
0	Все ситуации, отличные от описанных выше.

С6 Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

Решение. Наименьшее общее кратное чисел, составляющих множество A, равно $210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Поэтому числа, составляющие множество A – это делители 210. Всего делителей 16:

$$1, 2, 3, 5, 7, 2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 3\cdot 5, 3\cdot 7, 5\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5, 2\cdot 3\cdot 7, 2\cdot 5\cdot 7, 3\cdot 5\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

Каждый делитель содержит не более одного множителя 2. А произведение всех чисел из A делится $1920 = 2^7\cdot 3\cdot 5$. Поэтому среди чисел, составляющих A, должно быть, по крайней мере семь чётных, а их всего восемь:

Если число 2 входит в A, то любое другое число из A должно делится на 2. Значит,

$$A = \{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\},$$

но произведение этих чисел равно $2^8\cdot 3^4\cdot 5^4\cdot 7^4 = (2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2)^2$.

Значит, 2 не входит в A, а числа

$$2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5, 2\cdot 3\cdot 7, 2\cdot 5\cdot 7, 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

входят в A, но их всего семь. Поэтому этот набор нужно расширить, добавляя делители 210, не взаимно простые со всеми указанными семью числами. Такой делитель единственный – число $3\cdot 5\cdot 7$.

Ответ: $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован, однако правильно выбраны семь чётных чисел, входящих в искомое множество.	3
Ответ может быть даже не сформулирован, однако указано, что числа, составляющие искомое множество – это делители 210 и по крайней мере семь из них – чётные.	2
Ответа нет, однако предложен «разумный» перебор.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0