

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$.

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

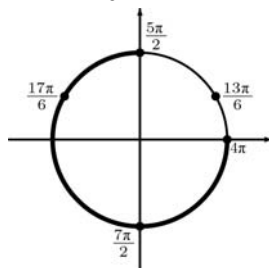
Решение.

а) По формуле приведения получим:

$$\sin 2x = \cos x, \quad 2\sin x \cos x = \cos x, \quad \cos x(2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, $\cos x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Корни: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$:

$$\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}.$$

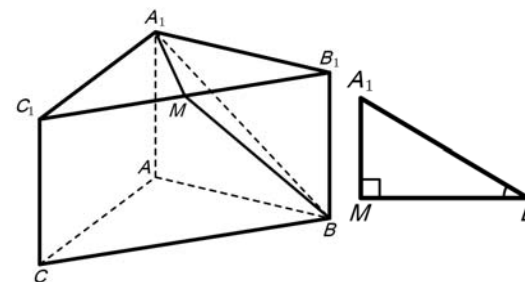
Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
В уравнении получен обоснованный ответ, верно указаны корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Уравнение решено неверно	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 Основанием прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой $A_1 B$ и плоскостью BCC_1 .

Поскольку призма $ABC A_1 B_1 C_1$ прямая, то высота $A_1 M$ треугольника $A_1 B_1 C_1$ перпендикулярна плоскости BCC_1 . Поэтому прямая BM – проекция прямой $A_1 B$ на плоскость BCC_1 . Значит, искомый угол равен углу $A_1 B M$.

Так как $B_1 M = 4, BB_1 = 3$, то $BM = 5$; $A_1 M = \sqrt{A_1 B_1^2 - B_1 M^2} = 3$. Отсюда $\operatorname{tg} \angle A_1 B M = \frac{A_1 M}{BM} = \frac{3}{5}$. Следовательно, $\angle A_1 B M = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} = \operatorname{arctg} 0,6$.



Ответ: $\operatorname{arctg} 0,6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+1) \cdot \log_{x+5}(4-x) \geq 0, \\ \left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right|^{x-1,2} + \left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right|^{1,2-x} \leq 2. \end{cases}$$

Рассмотрим второе неравенство. Оно имеет смысл при $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \neq 0$, т.е. при $x \neq 1$.

Пусть $\left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right|^{x-1,2} = t$. Тогда неравенство принимает вид $t + \frac{1}{t} \leq 2$.

Откуда $t = 1$ или $t < 0$.

При всех допустимых x основание степени положительно и, следовательно, $t > 0$. Значит, неравенство выполняется только при $t = 1$. Выясним, при каких x это происходит:

$$\left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right|^{x-1,2} = 1; \quad \begin{cases} \left| \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \right| = 1, \\ x - 1,2 = 0, \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2,5, \\ x = 1,2, \\ x = -0,5. \end{cases}$$

Подставим в первое неравенство найденные значения x :

1. При $x = 2,5$: $\log_{0,5}3,5 \cdot \log_{7,5}1,5 < 0$.
2. При $x = 1,2$: $\log_{1,8}2,2 \cdot \log_{6,2}2,8 > 0$.
3. При $x = -0,5$: $\log_{3,5}0,5 \cdot \log_{4,5}4,5 < 0$.

Неравенству удовлетворяет только значение $x = 1,2$.

Ответ: 1,2.

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	3
Оба неравенства решены верно, но ответ к системе отсутствует или неверный, или допущена ошибка при подстановке решений второго неравенства в первое и проверке знаков.	2
Верно решено только одно из неравенств	1
Не решено верно ни одно из неравенств	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

С4 Точка M лежит на отрезке AB . На окружности с диаметром AB взята точка C , удаленная от точек A, M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC .

Точка C лежит на окружности с диаметром AB , поэтому $\angle ACB = 90^\circ$. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25.$$

Пусть CD – высота треугольника ABC . Тогда

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12, \quad BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{225 - 144} = 9.$$

Из прямоугольного треугольника CMD находим:

$$DM = \sqrt{CM^2 - CD^2} = \sqrt{14^2 - 12^2} = 2\sqrt{13}.$$

Пусть точка M лежит между точками A и D (рис. 1). Тогда $MB = MD + BD = 9 + 2\sqrt{13}$. Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2}MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (9 + 2\sqrt{13}) \cdot 12 = 54 + 12\sqrt{13}.$$

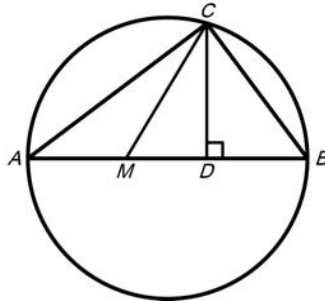


Рис.1

Если точка M лежит между B и D (рис. 2), то $MB = BD - MD = 9 - 2\sqrt{13}$.
Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (9 - 2\sqrt{13}) = 54 - 12\sqrt{13}.$$

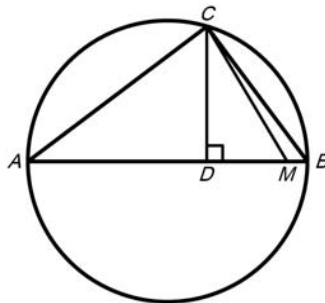


Рис.2

Ответ: $54 \pm 12\sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С5 Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$ больше, чем -24 .

1. Функция $f(x)$ имеет вид:

а) при $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5) \geq 0$

$$f(x) = 4ax + (x^2 - 6x + 5) = x^2 + 2(2a - 3)x + 5,$$

а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = 3 - 2a$;

б) при $(x - 1)(x - 5) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$

$$f(x) = 4ax - (x^2 - 6x + 5) = -x^2 + 2(2a + 3)x - 5,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

2. Если $3 - 2a$ принадлежит отрезку $[1; 5]$, то наименьшее значение функция может принимать только в точках $x = 1$ и $x = 5$. Если $3 - 2a \notin [1; 5]$ – то еще и в точке $x = 3 - 2a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше -24 тогда и только тогда, когда

$$\text{либо } \begin{cases} 3 - 2a \in [1; 5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} 3 - 2a \notin [1; 5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \\ f(3 - 2a) > -24. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -1 \leq a \leq 1, \\ 4a > -24, \\ 20a > -24; \end{cases} \quad -1 \leq a \leq 1.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a \in (-1, 2; -1) \cup (1; +\infty), \\ |2a - 3| < \sqrt{29}; \end{cases} \quad \frac{3 - \sqrt{29}}{2} < a < -1 \quad \text{или} \quad 1 < a < \frac{3 + \sqrt{29}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3 - \sqrt{29}}{2} < a < \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$.

Содержание критерия.	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток, содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке.	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения частей двух парабол.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл .</i>	4

С6

Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв

$b_1 = 216 = 6^3$ и $q = \frac{7}{6}$, получим $b_2 = 6 \cdot 6 \cdot 7 = 252$, $b_3 = 6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$, $b_4 = 7^3 = 343$.

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая последовательность есть. Без ограничения общности

она возрастает: пусть её знаменатель есть $q = \frac{m}{k}$, где m и k — взаимно

простые натуральные числа. Тогда прогрессия имеет вид

$$210 < b_1 < b_2 = b_1 q < \dots < b_5 = b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} \cdot m^4 < 350;$$

Поэтому

$$b_5 = b_1 q^4 \geq b_1 \cdot \frac{4^4}{3^4} > 210 \cdot \frac{256}{81} > 350,$$

что противоречит требованию задачи.

Ответ: а) да; б) нет.

Содержание критерия.	Баллы.
Верно выполнены: а), б).	4.
При выполнении заданий а) или б) допущена ошибка или неточность, не повлиявшая на ход решения Ответ верный	3.
Верно выполнен только пункт б).	2
Верно выполнен только пункт а)	1.
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл .</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Дано уравнение $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin x$.

а) Решите уравнение;

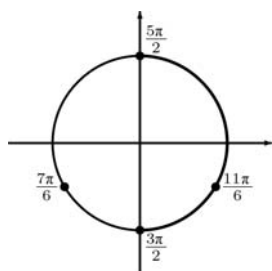
б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

а) По формуле приведения получим:

$$-\cos x = \sin x, 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Значит, $\sin x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Корни: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$:

$$\frac{11\pi}{6} \text{ и } \frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
В уравнении получен обоснованный ответ, верно указаны корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Уравнение решено неверно	0
<i>Максимальный балл</i>	2

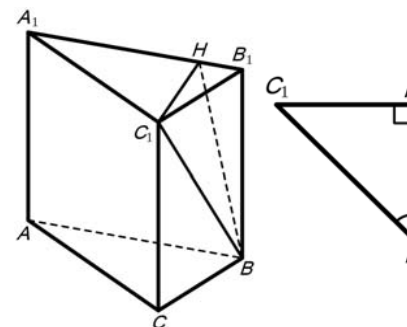
C2 Основанием прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник $ABC, \angle C = 90^\circ, AB = 5, BC = \sqrt{5}$. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой $C_1 B$ и плоскостью ABB_1 .

Поскольку призма $ABC A_1 B_1 C_1$ прямая, то высота $C_1 H$ треугольника $A_1 B_1 C_1$ перпендикулярна плоскости ABB_1 . Поэтому прямая BH – проекция прямой $C_1 B$ на плоскость ABB_1 . Значит, искомый угол равен углу $C_1 B H$.

Так как $A_1 C_1 = \sqrt{A_1 B_1^2 - B_1 C_1^2} = 2\sqrt{5}$, то

$$C_1 H = \frac{A_1 C_1 \cdot B_1 C_1}{A_1 B_1} = 2; BC_1 = \sqrt{BB_1^2 + B_1 C_1^2} = 2\sqrt{2}.$$

Получается, что в прямоугольном треугольнике $C_1 B H$ гипотенуза BC_1 в $\sqrt{2}$ раз больше катета $C_1 H$. Следовательно, $\angle C_1 B H = 45^\circ$.



Ответ: 45°

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x+5}(6-x) \cdot \log_{4-x}(x+3) \geq 0, \\ |2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \leq 2. \end{cases}$$

Рассмотрим второе неравенство. Оно имеет смысл при $2x-6 \neq 0$, т.е. при $x \neq 3$.

Пусть $|2x-6|^{x+1} = t$. Тогда неравенство принимает вид $t + \frac{1}{t} \leq 2$. Откуда $t = 1$

или $t < 0$.

При всех допустимых x основание степени положительно и, следовательно, $t > 0$. Значит, неравенство выполняется только при $t = 1$. Выясним, при каких x это происходит:

$$|2x-6|^{x+1} = 1; \quad \begin{cases} |2x-6| = 1, \\ x+1 = 0, \\ 2x-6 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, 5, \\ x = 3, 5, \\ x = -1. \end{cases}$$

Подставим в первое неравенство найденные значения x :

1. При $x = 2, 5$: $\log_{7,5} 3, 5 \cdot \log_{1,5} 5, 5 > 0$.

2. При $x = 3, 5$: $\log_{8,5} 2, 5 \cdot \log_{0,5} 6, 5 < 0$.

3. При $x = -1$: $\log_4 7 \cdot \log_5 2 > 0$.

Неравенству удовлетворяют значения $x = -1$ и $x = 2, 5$.

Ответ: -1 ; $2, 5$.

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	3
Оба неравенства решены верно, но ответ к системе отсутствует или неверный, или допущена ошибка при подстановке решений второго неравенства в первое и проверке знаков.	2
Верно решено только одно из неравенств	1
Не решено верно ни одно из неравенств	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С4 Точка M лежит на отрезке AB . На окружности с диаметром AB взята точка C , удаленная от точек A, M и B на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC .

Точка C лежит на окружности с диаметром AB , поэтому $\angle ACB = 90^\circ$. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50.$$

Пусть CD – высота треугольника ABC . Тогда

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{40 \cdot 30}{50} = 24, \quad BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{900 - 576} = 18.$$

Из прямоугольного треугольника CMD находим:

$$DM = \sqrt{CM^2 - CD^2} = \sqrt{29^2 - 24^2} = \sqrt{265}.$$

Пусть точка M лежит между точками A и D (рис. 1). Тогда

$$MB = MD + BD = 18 + \sqrt{265}.$$

Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18 + \sqrt{265}) = 216 + 12\sqrt{265}$$

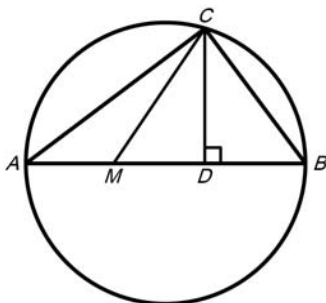


Рис.1

Если точка M лежит между B и D (рис. 2), то $MB = BD - MD = 18 - \sqrt{265}$.
Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18 - \sqrt{265}) = 216 - 12\sqrt{265}.$$

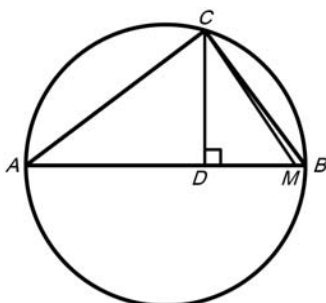


Рис.2

Ответ: $216 \pm 12\sqrt{265}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

С5 Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 10x + 21|$ больше, чем -42 .

1. Функция $f(x)$ имеет вид:

а) при $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7) \geq 0$

$$f(x) = 4ax + (x^2 - 10x + 21) = x^2 + 2(2a - 5)x + 21,$$

а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = 5 - 2a$;

б) при $(x - 3)(x - 7) \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$

$$f(x) = 4ax - (x^2 - 10x + 21) = -x^2 + 2(2a + 5)x - 21,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

2. Если $5 - 2a$ принадлежит отрезку $[3; 7]$, то функция может принять наименьшее значение только в точках $x = 3$ и $x = 7$. Если $5 - 2a \notin [3; 7]$ – то еще и в точке $x = 5 - 2a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше -42 тогда и только тогда, когда

$$\text{либо } \begin{cases} 5 - 2a \in [3; 7], \\ f(3) > -42, \\ f(7) > -42, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} 5 - 2a \notin [3; 7], \\ f(3) > -42, \\ f(7) > -42, \\ f(5 - 2a) > -42. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -1 \leq a \leq 1, \\ 12a > -42, \\ 28a > -42; \end{cases} \quad -1 \leq a \leq 1.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a \in (-1, 5; -1) \cup (1; +\infty), \\ |2a - 5| < 3\sqrt{7}; \end{cases} \quad \frac{5 - 3\sqrt{7}}{2} < a < -1 \quad \text{или} \quad 1 < a < \frac{5 + 3\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $\frac{5 - 3\sqrt{7}}{2} < a < \frac{5 + 3\sqrt{7}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток, содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения частей двух парабол	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6 Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.

- а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?
 б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв $b_1 = 512 = 8^3$ и $q = \frac{9}{8}$, получим $b_2 = 8 \cdot 8 \cdot 9 = 576$, $b_3 = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$, $b_4 = 9^3 = 729$.

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая последовательность есть. Без ограничения общности она возрастает; пусть её знаменатель есть $q = \frac{m}{k}$, где m и k — взаимно простые натуральные числа. Тогда прогрессия имеет вид

$$510 < b_1 < b_2 = b_1q < \dots < b_5 = b_1q^4 = \frac{b_1}{k^4} \cdot m^4 < 740;$$

так как m и k взаимно просты, b_1 делится на k^4 , а значит, $m^4 < 740$, откуда $m \leq 5$.

Так как $q > 1$, $k < m$. Но k целое, поэтому $k \leq m - 1 \leq 4$. Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \geq \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \geq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Поэтому

$$b_5 = b_1q^4 \geq b_1 \cdot \frac{5^4}{4^4} > 510 \cdot \frac{625}{256} > 740,$$

что противоречит требованию задачи.

Ответ: а) да; б) нет

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б)	4
При выполнении заданий а) или б) допущена ошибка или неточность, не повлиявшая на ход решения. Ответ верный	3
Верно выполнен только пункт б)	2
Верно выполнен только пункт а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4