

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1** Дано уравнение  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$ .

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ .

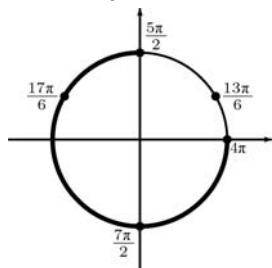
**Решение.**

а) По формуле приведения получим:

$$\sin 2x = \cos x, \quad 2\sin x \cos x = \cos x, \quad \cos x(2\sin x - 1) = 0.$$

Значит,  $\cos x = 0$  или  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Корни:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ;  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$  или  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .



б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке  $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ :

$$\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}.$$

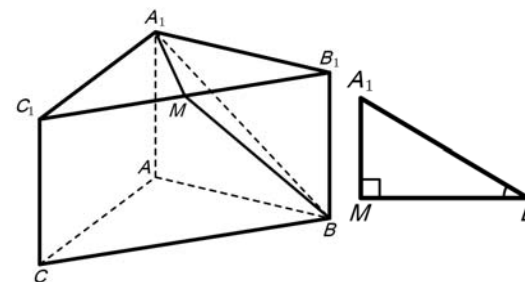
**Ответ:** а)  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ;  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ;  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . б)  $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
В уравнении получен обоснованный ответ, верно указаны корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Уравнение решено неверно	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**C2** Основанием прямой призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 8$ . Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой  $A_1 B$  и плоскостью  $BCC_1$ .

Поскольку призма  $ABC A_1 B_1 C_1$  прямая, то высота  $A_1 M$  треугольника  $A_1 B_1 C_1$  перпендикулярна плоскости  $BCC_1$ . Поэтому прямая  $BM$  – проекция прямой  $A_1 B$  на плоскость  $BCC_1$ . Значит, искомый угол равен углу  $A_1 B M$ .

Так как  $B_1 M = 4, BB_1 = 3$ , то  $BM = 5$ ;  $A_1 M = \sqrt{A_1 B_1^2 - B_1 M^2} = 3$ . Отсюда  $\operatorname{tg} \angle A_1 B M = \frac{A_1 M}{BM} = \frac{3}{5}$ . Следовательно,  $\angle A_1 B M = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} = \operatorname{arctg} 0,6$ .



**Ответ:**  $\operatorname{arctg} 0,6$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**С3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{2x^2 - 2x + 1}{2x - 1} \leq 1, \\ 25x^2 - 3|3 - 5x| < 30x - 9. \end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство:

$$\frac{2x^2 - 2x + 1 - 2x + 1}{2x - 1} \leq 0; \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1} \leq 0; \quad \frac{(x - 1)^2}{2x - 1} \leq 0.$$

Решения:  $x = 1$  или  $x < \frac{1}{2}$ .

Преобразуем второе неравенство:

$$25x^2 - 30x + 9 - 3|3 - 5x| < 0; \quad (5x - 3)^2 - 3|5x - 3| < 0.$$

Сделаем замену  $y = |5x - 3|$ . Получаем неравенство второй степени  $y^2 - 3y < 0$ , откуда  $0 < y < 3$ .

Обратная замена дает:  $0 < |5x - 3| < 3$ , откуда  $0 < x < 0,6$  или  $0,6 < x < 1,2$ .

Решение системы неравенств:  $0 < x < 0,5$  или  $x = 1$ .

**Ответ:** (0; 0,5); 1.

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	3
Оба неравенства решены верно, но ответ к системе отсутствует или неверный	2
Верно решено только одно из неравенств	1
Не решено верно ни одно из неравенств	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**С4** Точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . На окружности с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , удаленная от точек  $A, M$  и  $B$  на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника  $BMC$ .

Точка  $C$  лежит на окружности с диаметром  $AB$ , поэтому  $\angle ACB = 90^\circ$ . По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25.$$

Пусть  $CD$  – высота треугольника  $ABC$ . Тогда

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12, \quad BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{225 - 144} = 9.$$

Из прямоугольного треугольника  $CMD$  находим:

$$DM = \sqrt{CM^2 - CD^2} = \sqrt{14^2 - 12^2} = 2\sqrt{13}.$$

Пусть точка  $M$  лежит между точками  $A$  и  $D$  (рис. 1). Тогда  $MB = MD + BD = 9 + 2\sqrt{13}$ . Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2}MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (9 + 2\sqrt{13}) = 54 + 12\sqrt{13}.$$

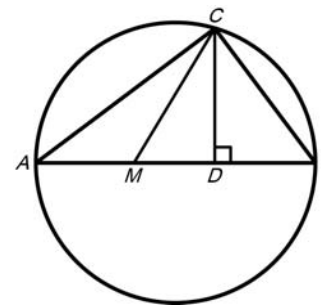


Рис.1

Если точка  $M$  лежит между  $B$  и  $D$  (рис. 2), то  $MB = BD - MD = 9 - 2\sqrt{13}$ . Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2}MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (9 - 2\sqrt{13}) = 54 - 12\sqrt{13}.$$

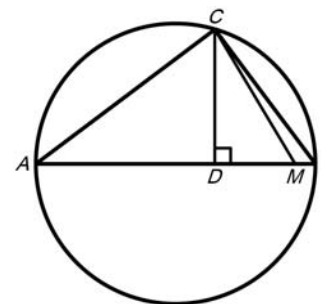


Рис.2

**Ответ:**  $54 \pm 12\sqrt{13}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

**С5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$  больше, чем  $-24$ .

1. Функция  $f(x)$  имеет вид:

а) при  $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \geq 0$

$$f(x) = 4ax + (x^2 - 6x + 5) = x^2 + 2(2a-3)x + 5,$$

а ее график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии  $x = 3 - 2a$ ;

б) при  $(x-1)(x-5) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$

$$f(x) = 4ax - (x^2 - 6x + 5) = -x^2 + 2(2a+3)x - 5,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

2. Если  $3 - 2a$  принадлежит отрезку  $[1; 5]$ , то наименьшее значение функция может принимать только в точках  $x = 1$  и  $x = 5$ . Если  $3 - 2a \notin [1; 5]$  – то еще и в точке  $x = 3 - 2a$ .

3. Наименьшее значение функции  $f(x)$  больше  $-24$  тогда и только тогда, когда

$$\text{либо } \begin{cases} 3 - 2a \in [1; 5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} 3 - 2a \notin [1; 5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \\ f(3 - 2a) > -24. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -1 \leq a \leq 1, \\ 4a > -24, & -1 \leq a \leq 1. \\ 20a > -24; \end{cases}$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a \in (-1, 2; -1) \cup (1; +\infty), \\ |2a - 3| < \sqrt{29}; \end{cases} \quad \frac{3 - \sqrt{29}}{2} < a < -1 \quad \text{или} \quad 1 < a < \frac{3 + \sqrt{29}}{2}.$$

**Ответ:**  $\frac{3 - \sqrt{29}}{2} < a < \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток, содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения частей двух парабол	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

**С6** Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв  $b_1 = 216 = 6^3$  и  $q = \frac{7}{6}$ , получим  $b_2 = 6 \cdot 6 \cdot 7 = 252$ ,  $b_3 = 6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ ,  $b_4 = 7^3 = 343$ .

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая последовательность есть. Без ограничения общности она возрастает; пусть её знаменатель есть  $q = \frac{m}{k}$ , где  $m$  и  $k$  – взаимно простые натуральные числа. Тогда прогрессия имеет вид

$$210 < b_1 < b_2 = b_1 q < \dots < b_5 = b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} \cdot m^4 < 350;$$

так как  $m$  и  $k$  взаимно просты,  $b_1$  делится на  $k^4$ , а значит,  $m^4 < 350$ , откуда  $m \leq 4$ .

Так как  $q > 1$ ,  $k < m$ . Но  $k$  – целое, поэтому  $k \leq m - 1 \leq 3$ . Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \geq \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \geq 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Поэтому

$$b_5 = b_1 q^4 \geq b_1 \cdot \frac{4^4}{3^4} > 210 \cdot \frac{256}{81} > 350,$$

что противоречит требованию задачи.

Ответ : а) да. б) нет.

Содержание критерия.	Баллы.
Верно выполнены: а), б).	4.
При выполнении заданий а) или б) допущена ошибка или неточность, не повлиявшая на ход решения Ответ верный	3.
Верно выполнен только пункт б).	2.
Верно выполнен только пункт а)	1.
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0.
<i>Максимальный балл</i>	4.

**Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом**

**C1** Дано уравнение  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin x$ .

а) Решите уравнение;

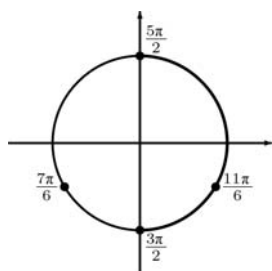
б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

а) По формуле приведения получим:

$$-\cos x = \sin x, 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Значит,  $\sin x = 1$  или  $\sin x = -\frac{1}{2}$ .

Корни:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ;  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$  или  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .



б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке  $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ :

$$\frac{11\pi}{6} \text{ и } \frac{5\pi}{2}.$$

**Ответ:** а)  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ;  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ;  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
В уравнении получен обоснованный ответ, верно указаны корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Уравнение решено неверно	0
<i>Максимальный балл</i>	2

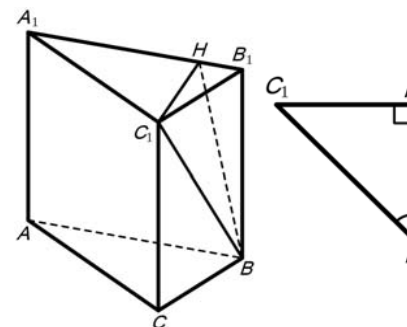
**C2** Основанием прямой призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC, \angle C = 90^\circ, AB = 5, BC = \sqrt{5}$ . Высота призмы равна  $\sqrt{3}$ . Найдите угол между прямой  $C_1 B$  и плоскостью  $ABB_1$ .

Поскольку призма  $ABC A_1 B_1 C_1$  прямая, то высота  $C_1 H$  треугольника  $A_1 B_1 C_1$  перпендикулярна плоскости  $ABB_1$ . Поэтому прямая  $BH$  – проекция прямой  $C_1 B$  на плоскость  $ABB_1$ . Значит, искомый угол равен углу  $C_1 B H$ .

Так как  $A_1 C_1 = \sqrt{A_1 B_1^2 - B_1 C_1^2} = 2\sqrt{5}$ , то

$$C_1 H = \frac{A_1 C_1 \cdot B_1 C_1}{A_1 B_1} = 2; BC_1 = \sqrt{BB_1^2 + B_1 C_1^2} = 2\sqrt{2}.$$

Получается, что в прямоугольном треугольнике  $C_1 B H$  гипотенуза  $BC_1$  в  $\sqrt{2}$  раз больше катета  $C_1 H$ . Следовательно,  $\angle C_1 B H = 45^\circ$ .



**Ответ:**  $45^\circ$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**С3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{2x^2 - 6x + 5}{2x - 3} \leq 1, \\ 25x^2 - 4|8 - 5x| < 80x - 64. \end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство:

$$\frac{2x^2 - 6x + 5 - 2x + 3}{2x - 3} \leq 0; \quad \frac{x^2 - 4x + 4}{2x - 3} \leq 0; \quad \frac{(x - 2)^2}{2x - 3} \leq 0.$$

Решения:  $x = 2$  или  $x < 1, 5$ .

Преобразуем второе неравенство:

$$25x^2 - 80x + 64 - 4|8 - 5x| < 0; \quad (5x - 8)^2 - 4|5x - 8| < 0.$$

Сделаем замену  $y = |5x - 8|$ . Получаем неравенство второй степени  $y^2 - 4y < 0$ , откуда  $0 < y < 4$ .

Обратная замена дает:  $0 < |5x - 8| < 4$ , откуда  $0, 8 < x < 1, 6$  или  $1, 6 < x < 2, 4$ .

Решение системы неравенств:  $0, 8 < x < 1, 5$  или  $x = 2$ .

**Ответ:**  $(0, 8; 1, 5); 2$ .

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	3
Оба неравенства решены верно, но ответ к системе отсутствует или неверный	2
Верно решено только одно из неравенств	1
Не решено верно ни одно из неравенств	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**С4** Точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . На окружности с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , удаленная от точек  $A, M$  и  $B$  на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника  $BMC$ .

Точка  $C$  лежит на окружности с диаметром  $AB$ , поэтому  $\angle ACB = 90^\circ$ . По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50.$$

Пусть  $CD$  – высота треугольника  $ABC$ . Тогда

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{40 \cdot 30}{50} = 24, \quad BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{900 - 576} = 18.$$

Из прямоугольного треугольника  $CMD$  находим:

$$DM = \sqrt{CM^2 - CD^2} = \sqrt{29^2 - 24^2} = \sqrt{265}.$$

Пусть точка  $M$  лежит между точками  $A$  и  $D$  (рис. 1). Тогда

$$MB = MD + BD = 18 + \sqrt{265}.$$

Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2}MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18 + \sqrt{265}) = 216 + 12\sqrt{265}$$

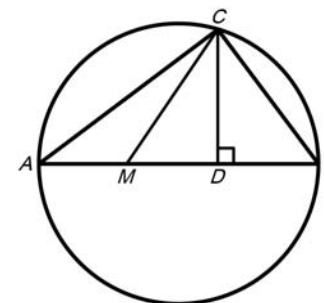


Рис.1

Если точка  $M$  лежит между  $B$  и  $D$  (рис. 2), то  $MB = BD - MD = 18 - \sqrt{265}$ . Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2}MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18 - \sqrt{265}) = 216 - 12\sqrt{265}.$$

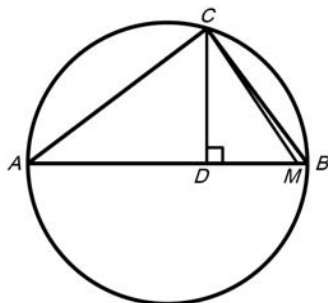


Рис.2

Ответ:  $216 \pm 12\sqrt{265}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

**C5** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 4ax + |x^2 - 10x + 21|$  больше, чем  $-42$ .

1. Функция  $f(x)$  имеет вид:

а) при  $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7) \geq 0$

$$f(x) = 4ax + (x^2 - 10x + 21) = x^2 + 2(2a - 5)x + 21,$$

а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии  $x = 5 - 2a$ ;

б) при  $(x - 3)(x - 7) \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$

$$f(x) = 4ax - (x^2 - 10x + 21) = -x^2 + 2(2a + 5)x - 21,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

2. Если  $5 - 2a$  принадлежит отрезку  $[3; 7]$ , то функция может принять наименьшее значение только в точках  $x = 3$  и  $x = 7$ . Если  $5 - 2a \notin [3; 7]$  – то еще и в точке  $x = 5 - 2a$ .

3. Наименьшее значение функции  $f(x)$  больше  $-42$  тогда и только тогда, когда

$$\text{либо } \begin{cases} 5 - 2a \in [3; 7], \\ f(3) > -42, \\ f(7) > -42, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} 5 - 2a \notin [3; 7], \\ f(3) > -42, \\ f(7) > -42, \\ f(5 - 2a) > -42. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -1 \leq a \leq 1, \\ 12a > -42, & -1 \leq a \leq 1. \\ 28a > -42; \end{cases}$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a \in (-1, 5) \cup (-1, +\infty), \\ |2a - 5| < 3\sqrt{7}; \end{cases} \quad \frac{5 - 3\sqrt{7}}{2} < a < -1 \quad \text{или} \quad 1 < a < \frac{5 + 3\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{5 - 3\sqrt{7}}{2} < a < \frac{5 + 3\sqrt{7}}{2}$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток, содержащий верный ответ, либо содержащийся в верном промежутке	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения частей двух парабол	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

**С6** Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв  $b_1 = 512 = 8^3$  и  $q = \frac{9}{8}$ , получим  $b_2 = 8 \cdot 8 \cdot 9 = 576$ ,  $b_3 = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ ,  $b_4 = 9^3 = 729$ .

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая последовательность есть. Без ограничения общности она возрастает; пусть её знаменатель есть  $q = \frac{m}{k}$ , где  $m$  и  $k$  — взаимно простые натуральные числа. Тогда прогрессия имеет вид

$$510 < b_1 < b_2 = b_1 q < \dots < b_5 = b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} \cdot m^4 < 740;$$

так как  $m$  и  $k$  взаимно просты,  $b_1$  делится на  $k^4$ , а значит,  $m^4 < 740$ , откуда  $m \leq 5$ .

Так как  $q > 1$ ,  $k < m$ . Но  $k$  целое, поэтому  $k \leq m - 1 \leq 4$ . Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \geq \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \geq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Поэтому

$$b_5 = b_1 q^4 \geq b_1 \cdot \frac{5^4}{4^4} > 510 \cdot \frac{625}{256} > 740,$$

что противоречит требованию задачи.

**Ответ:** а) да; б) нет

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б)	4
При выполнении заданий а) или б) допущена ошибка или неточность, не повлиявшая на ход решения. Ответ верный	3
Верно выполнен только пункт б)	2
Верно выполнен только пункт а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4