Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

Решение.

Сделаем замену $\cos x = y$ и получим квадратное уравнение $6y^2 - 7y - 5 = 0$, корнями которого являются числа $-\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{3}$.

Уравнение $\cos x = \frac{5}{3}$ не имеет решений, а из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ находим:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ или } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Корни уравнения: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}$.

Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

$$-\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 2\pi;\quad -\frac{1}{6} \le n \le \frac{8}{6}:\ n = 0,\ x = -\frac{2\pi}{3};\ n = 1,\ x = \frac{4\pi}{3}.$$

$$-\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi;\quad -\frac{5}{6} \le k \le \frac{2}{3}:\ k = 0,\ x = \frac{2\pi}{3}.$$

Отрезку $[-\pi; 2\pi]$ принадлежат только корни $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

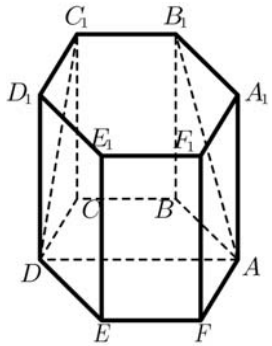
Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Отрезку принадлежат корни $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

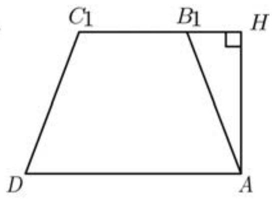
Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

С2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 4, найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.

Решение.

Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то прямые AD и BC параллельны, параллельны также прямые BC и B_1C_1, следовательно, прямые AD и B_1C_1 параллельны. Расстояние от точки A до прямой B_1C_1 равно расстоянию между прямыми AD и B_1C_1.





В трапеции DC_1B_1A $B_1C_1 = 4$, $DA = 8$, $DC_1 = B_1A = 4\sqrt{2}$.

$$B_1H = \frac{DA - C_1B_1}{2} = \frac{8-4}{2} = 2,\ \text{тогда } AH = 2\sqrt{7}.$$

Ответ: $2\sqrt{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{x-4}{3-x}\right)\sqrt{6x-x^2}\le 0.$$

Решение.

1 случай. $6x-x^2=0$, тогда $x=0$ или $x=6$. При этих значениях x выражение $\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{x-4}{3-x}$ имеет смысл, поэтому числа 0 и 6 являются решениями неравенства.

2 случай. $6x-x^2>0$. При $0<x<6$ $\sqrt{6x-x^2}>0$, тогда

$$\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{x-4}{3-x}\le 0;\ \frac{1}{(x-4)(x-3)}+\frac{x-4}{3-x}\le 0;$$

$$\frac{1-(x-4)^2}{(x-4)(x-3)}\le 0;\ \frac{(5-x)(x-3)}{(x-4)(x-3)}\le 0.$$

С помощью метода интервалов получаем: $x<3$, $3<x<4$ или $x\ge 5$. Учитывая условие $0<x<6$, находим: $0<x<3$, $3<x<4$ или $5\le x<6$.

Добавляя точки $x=0$ и $x=6$, находим все решения данного неравенства: $[0;3)$, $(3;4)$, $[5;6]$.

Ответ: $[0;3)$, $(3;4)$, $[5;6]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек (не включены в ответ 0 или 6)	2
Полученный ответ неверен, решено верно только дробно-рациональное неравенство без учёта области допустимых значений переменной неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С4 Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 14, а отношение катетов треугольника равно $\frac{7}{24}$.

Решение.

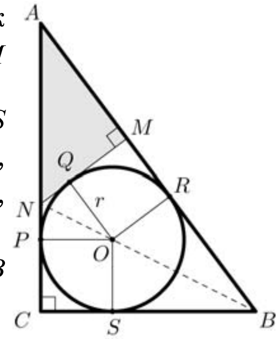


Рис. 1

Обозначим треугольник ABC. Предположим, что отрезок отсекает от треугольника ABC треугольник ANM (см. рис. 1).

Обозначим точки касания окружности и прямых P, Q, R, S (см. рис. 1). Так как $OQMR$ и $OPCS$ – квадраты, $MQ=PC=r$, где r – радиус окружности. Кроме того, $NQ=NP$. Значит, $NM=NC$.

BN – биссектриса угла ABC. Треугольники NMB и NCB равны по гипотенузе и катету.

Пусть $CB=7x$, а $CA=24x$. По теореме Пифагора $AB=25x$.

Тогда $AM=AB-BM=25x-7x=18x$. Из подобия треугольников AMN и ACB получаем: $\frac{CB}{NM}=\frac{CA}{AM}$, откуда $\frac{7x}{14}=\frac{24x}{18x}$.

Следовательно, $x=\frac{8}{3}$. Найдём радиус окружности:

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{6x}{2}=3x=8.$$

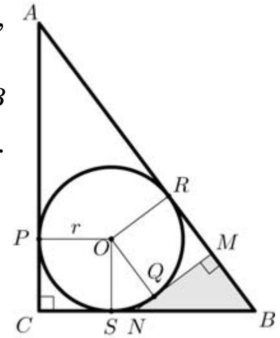


Рис. 2

Если отрезок отсекает треугольник BMN (рис. 2), то, рассуждая аналогично, находим, что $BM=25x-24x=x$.

Из подобия треугольников следует ACB и NMB следует $\frac{CA}{NM}=\frac{CB}{BM}$, откуда получаем $\frac{24x}{14}=\frac{7x}{x}$, $x=\frac{49}{12}$.

Тогда $r=3x=\frac{49}{4}=12,25$.

Ответ: 8 или 12,25.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-9)^2+(y-5)^2=9, \\ (x+3)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение задаёт на плоскости окружности ω_1 и ω_2 радиуса 3, симметричные относительно оси ординат. Центры этих окружностей — точки $C_1\,(9;5)$ и $C_2(-9;5)$. Второе уравнение — уравнение окружности ω радиуса $a>0$ с центром $C\,(-3;0)$.

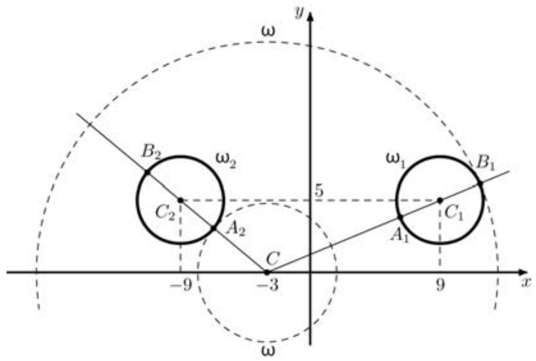
Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается одной из окружностей ω_1 и ω_2, но не имеет общих точек с другой окружностью.

Из точки C проведём лучи CC_1 и CC_2 и обозначим A_1, B_1 и A_2, B_2 точки их пересечения с окружностями ω_1 и ω_2 (см. рис.).

Заметим, что $CC_2<CC_1$, поэтому $CA_2<CA_1$ и $CB_2<CB_1$. Значит, если $a=CA_2$, то ω касается ω_2, но не имеет общих точек с ω_1. Если $a=CB_1$, то ω касается ω_1, но не имеет общих точек с ω_2.

$$CA_2=CC_2-C_2A_2=\sqrt{(9-3)^2+5^2}-3=\sqrt{61}-3;$$

$$CB_1=CC_1+C_1B_1=\sqrt{(9+3)^2+5^2}+3=13+3=16.$$



Сравним CA_1 и CB_2:

$$CA_1=\sqrt{(9+3)^2+5^2}-3=10,\ CB_2=\sqrt{(9-3)^2+5^2}+3=\sqrt{61}+3.$$

Получаем $CA_1<CB_2$. Значит, если ω касается ω_1 в точке A_1, то ω пересекает ω_2 в двух точках. Аналогично, если ω касается ω_2 в точке B_2, то ω пересекает ω_1 в двух точках.

Следовательно, других решений, кроме двух найденных, система не имеет.

Ответ: $\sqrt{61}-3$ или 16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения (не учтено условие $a>0$); – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и
а) пять;
б) четыре;
в) три
из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.
Пусть n – количество последовательных членов геометрической прогрессии, произведение которых делит 1512.
$1512 = 2^3 3^3 7^1$. Следовательно, члены геометрической прогрессии состоят только из простых множителей 2, 3 и 7.
Пусть первый член равен $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, а знаменатель прогрессии равен $2^d \cdot 3^e \cdot 7^f$ (a, b, c, d, e, f – целые неотрицательные числа, при этом хотя бы одно из чисел d, e, f больше нуля). Тогда произведение чисел равно

$$2^{na+d+2d+...+(n-1)d} \cdot 3^{nb+e+2e+...+(n-1)e} \cdot 7^{nc+f+2f+...+(n-1)f} =$$
$$= 2^{na+\frac{(n-1)n}{2}d} \cdot 3^{nb+\frac{(n-1)n}{2}e} \cdot 7^{nc+\frac{(n-1)n}{2}f}.$$

Полученное число является делителем числа $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$. Следовательно,

$$na + \frac{(n-1)nd}{2} \le 3,\ nb + \frac{(n-1)ne}{2} \le 3 \ \text{ и } \ nc + \frac{(n-1)nf}{2} \le 1. \quad (1)$$

Если $n \ge 4$, то $na + \frac{(n-1)nd}{2} \ge 4a + 6d$.

Аналогично,

$$nb + \frac{(n-1)ne}{2} \ge 4b + 6e \ \text{ и } \ nc + \frac{(n-1)nf}{2} \ge 4c + 6f.$$

Неравенства

$$4a + 6d \le 3, \ \ 4b + 6e \le 3 \ \text{ и } \ 4c + 6f \le 1$$

имеют целые неотрицательные решения только при $d = e = f = 0$, что невозможно.

Следовательно, $n \le 3$. Тем самым мы ответили на вопросы а) и б) – ни пять, ни четыре числа не могут образовывать геометрическую прогрессию и иметь при этом произведение, которое делит 1512.

Приведем пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи при $n = 3$. Положим $a = b = c = e = f = 0$, $d = 1$.

Получаем три члена геометрической прогрессии 1, 2, 4. Их произведение равно 8. $\frac{1512}{8} = 189 = 3 \cdot 63$. Следовательно, в качестве четвертого и пятого можно взять, например, числа 3 и 63: $1512 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 63$.
Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

Решение.

Сделаем замену $\sin x = y$ и получим квадратное уравнение $4y^2 - 12y + 5 = 0$, корнями которого являются числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{2}$.

Уравнение $\sin x = \frac{5}{2}$ не имеет решений, а из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ находим: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Корни уравнения: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

$-\pi \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n \le 2\pi$; $-\frac{7}{12} \le n \le \frac{11}{12}$: $n = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$.

$-\pi \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le 2\pi$; $-\frac{11}{12} \le k \le \frac{7}{12}$: $k = 0$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

Отрезку $[-\pi; 2\pi]$ принадлежат только корни $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

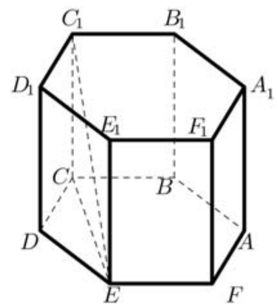
Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отрезку $[-\pi; 2\pi]$ принадлежат корни: $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Уравнение решено верно, указаны все корни, принадлежащие отрезку	2
Уравнение решено верно, однако корни, принадлежащие отрезку, не указаны или указаны неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 10, найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

Решение.

Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, прямые BC и CE перпендикулярны. Поскольку прямые BC и B_1C_1 параллельны, CE перпендикулярно B_1C_1. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах EC_1 перпендикулярно B_1C_1, так что длина отрезка EC_1 равна искомому расстоянию.



$CE = 10\sqrt{3}$; по условию $CC_1 = 10$. По теореме Пифагора для треугольника ECC_1 : $EC_1 = 20$.

Ответ: 20.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{x+5}{4+x} - \frac{1}{x^2+9x+20}\right)\sqrt{-7x - x^2} \ge 0, \\ x \cdot \sqrt{8} - 7x + 14\sqrt{8} > 57. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство.

$$\frac{(x+5)^2-1}{(x+5)(x+4)}\cdot\sqrt{-x(x+7)}\ge 0;\quad \frac{(x+6)(x+4)\sqrt{-x(x+7)}}{(x+4)(x+5)}\ge 0.$$

1 случай: $-7x-x^2=0$, тогда $x=0$ или $x=-7$. При этих x выражение $\dfrac{(x+6)(x+4)}{(x+4)(x+5)}$ имеет смысл, поэтому числа 0 и -7 являются решениями неравенства.

2 случай: $-7x-x^2>0$. Решаем неравенство $\dfrac{(x+6)(x+4)}{(x+4)(x+5)}\ge 0$.

Получим: $x\le -6$, $-5<x<-4$ или $x>-4$.

Решением первого неравенства системы является:

$$-7\le x\le -6,\quad -5<x<-4 \text{ или } -4<x\le 0.$$

Решим второе неравенство системы:

$$x\cdot\sqrt{8}-7x+14\sqrt{8}>57;\ (\sqrt{8}-7)x+(14\sqrt{8}-57)>0.$$

Учитывая, что $\sqrt{8}-7<0$, получаем:

$$x<\frac{57-14\sqrt{8}}{\sqrt{8}-7}=\frac{8-14\sqrt{8}+49}{\sqrt{8}-7}=\frac{(\sqrt{8}-7)^2}{\sqrt{8}-7}=\sqrt{8}-7.$$

Решением второго неравенства системы является: $x<\sqrt{8}-7$.

$-5<\sqrt{8}-7<-4$, поэтому решением системы неравенств является: $-7\le x\le -6$ или $-5<x<\sqrt{8}-7$.

Ответ: $[-7;\ -6]$, $(-5;\ \sqrt{8}-7)$.

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	3
Оба неравенства решены верно, но ответ к системе отсутствует или неверный	2
Верно решено только одно из неравенств исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно $\dfrac{15}{8}$.

Решение.

Обозначим треугольник ABC. Предположим, что отрезок отсекает от треугольника ABC треугольник ANM (см. рис. 1).

Обозначим точки касания окружности и прямых P, Q, R, S (см. рис. 1). Так как $OQMR$ и $OPCS$ — квадраты, $MQ=PC=r$, где r — радиус окружности. Кроме того, $NQ=NP$. Значит, $NM=NC$. BN — биссектриса угла ABC. Треугольники NMB и NCB равны по гипотенузе и катету.

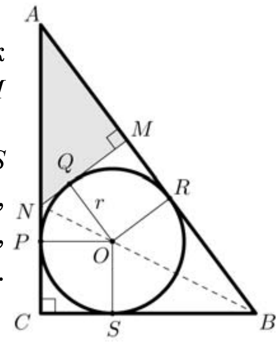


Рис. 1

Пусть $CB=8x$, а $CA=15x$. По теореме Пифагора $AB=17x$. Тогда $AM=AB-BM=17x-8x=9x$. Из подобия треугольников AMN и ACB получаем: $\dfrac{CB}{NM}=\dfrac{CA}{AM}$, откуда $\dfrac{8x}{40}=\dfrac{15x}{9x}$. Следовательно, $x=\dfrac{25}{3}$. Найдём радиус окружности:

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{6x}{2}=3x=25.$$

Если отрезок отсекает треугольник BNM (рис. 2), то, рассуждая аналогично, находим, что $BM=17x-15x=2x$. Из подобия треугольников ACB и NMB получаем: $\dfrac{CA}{NM}=\dfrac{CB}{BM}$, откуда $\dfrac{15x}{40}=\dfrac{8x}{2x}$, $x=\dfrac{32}{3}$. Тогда $r=3x=32$.

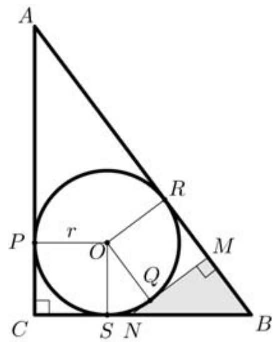


Рис. 2

Ответ: 25 или 32.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + \left| x^2 - 8x + 7 \right|$ больше 1.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2 - 8x + 7 \ge 0$: $f(x) = x^2 + 2(a-4)x + 7$, а ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4 - a$;

б) при $x^2 - 8x + 7 < 0$: $f(x) = -x^2 + (2a+8)x - 7$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

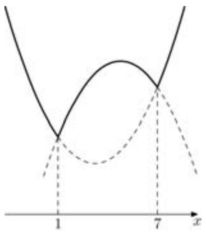


Рис. 1

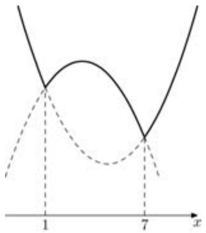


Рис. 2


Рис. 3

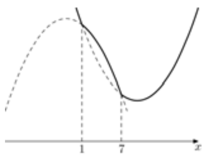


Рис. 4

2. Наименьшее значение функции $f(x)$ может приниматься только в точках $x = 1$ или $x = 7$, а если $4 - a \notin [1; 7]$ – то в точке $x = 4 - a$.

3. Наименьшее значение функции f больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) > 1, \\ f(7) > 1, \\ f(4-a) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a > 1, \\ 14a > 1, \\ 2a(4-a) + \left| a^2 - 9 \right| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \dfrac{1}{2}, \\ a > \dfrac{1}{14}, \\ 2a^2 - 8a + 1 - \left| a^2 - 9 \right| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge 3, \\ a^2 - 8a + 10 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2} < a < 3, \\ 3a^2 - 8a - 8 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge 3, \\ 4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2} < a < 3, \\ \dfrac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \dfrac{4 + \sqrt{40}}{3} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \le a < 4 + \sqrt{6} \\ \dfrac{1}{2} < a < 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; 4 + \sqrt{6} \right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

Пусть n – количество последовательных членов геометрической прогрессии, произведение которых делит 1008.

$1008 = 2^4 3^2 7^1$. Следовательно, члены геометрической прогрессии состоят только из простых множителей 2, 3 и 7.

Пусть первый член равен $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$,а знаменатель прогрессии равен $2^d \cdot 3^e \cdot 7^f$ (a, b, c, d, e, f – целые неотрицательные числа, при этом хотя бы одно из чисел d, e, f больше нуля). Тогда произведение чисел равно

$$2^{na+d+2d+...+(n-1)d} \cdot 3^{nb+e+2e+...+(n-1)e} \cdot 7^{nc+f+2f+...+(n-1)f} =$$
$$= 2^{na+\frac{(n-1)n}{2}d} \cdot 3^{nb+\frac{(n-1)n}{2}e} \cdot 7^{nc+\frac{(n-1)n}{2}f}.$$

Полученное число является делителем числа $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^1$. Следовательно,

$$na + \frac{(n-1)nd}{2} \le 4,\ nb + \frac{(n-1)ne}{2} \le 2 \quad \text{и} \quad nc + \frac{(n-1)nf}{2} \le 1. \quad (1)$$

Если $n \ge 4$, то $na + \frac{(n-1)nd}{2} \ge 4a + 6d$.

Аналогично,

$$nb + \frac{(n-1)ne}{2} \ge 4b + 6e \quad \text{и} \quad nc + \frac{(n-1)nf}{2} \ge 4c + 6f.$$

Неравенства $4a + 6d \le 4$, $4b + 6e \le 2$ и $4c + 6f \le 1$ имеют целые неотрицательные решения только при $d = e = f = 0$, что невозможно.

Следовательно, $n \le 3$. Тем самым мы ответили на вопросы а) и б) – ни пять, ни четыре числа не могут образовывать геометрическую прогрессию и иметь при этом произведение, которое делит 1008.

Приведем пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи при $n = 3$. Положим $a = b = c = e = f = 0$, $d = 1$.

Получаем три члена геометрической прогрессии $1, 2, 4$. Их произведение равно 8.

$\frac{1008}{8} = 126 = 3 \cdot 42$. Следовательно, в качестве четвертого и пятого можно взять, например, числа 3 и 42: $1008 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 42$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены б) и один пункт из двух: а), в)	3
Верно выполнено б) или а) и в)	2
Верно выполнен один пункт из двух: а), в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4