

**Единый государственный экзамен по математике, 2007 год
демонстрационная версия**

Часть А

А1. Найдите значение выражения $4^{6p} \cdot 4^{-4p}$ при $p = \frac{1}{4}$.

1. 1

2. 2

3. 32

4. 34

Решение. Используем свойство степени с одинаковым основанием: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. В нашем случае

$$4^{6p} \cdot 4^{-4p} = 4^{6p-4p} = 4^{2p}.$$

Подставим в полученное выражение $p = \frac{1}{4}$, имеем

$$4^{2 \cdot \frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

Правильный ответ: 2.

А2. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$.

1. 1,2

2. $\frac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{5}$

3. 2,4

4. $\sqrt[3]{2}$

Решение. Используя свойство $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, получим:

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{54}{250}} = \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{3}{5}.$$

Осталось вычислить произведение:

$$\frac{3}{5} \cdot \sqrt{16} = \frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Правильный ответ: 3.

A3. Найдите значение выражения $\log_4(64c)$, если $\log_4 c = -3,5$.

1. $-6,5$ 2. $-0,5$ 3. $-10,5$ 4. $-67,5$

Решение. Воспользуемся формулой логарифма произведения:

$$\log_4(64c) = \log_4 64 + \log_4 c = 3 + (-3,5) = -0,5.$$

Правильный ответ: 2.

Примечание. Возможен другой способ рассуждения: воспользуемся равенством $\log_4 c = -3,5$, рассматривая его как уравнение на переменную c :

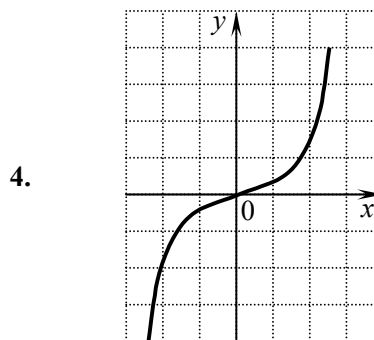
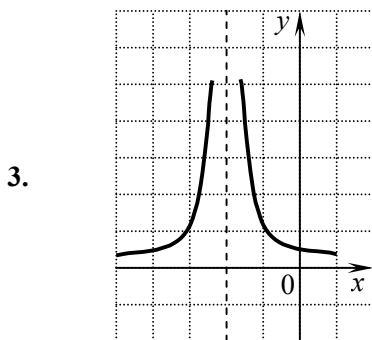
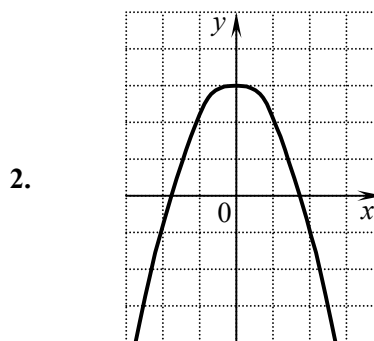
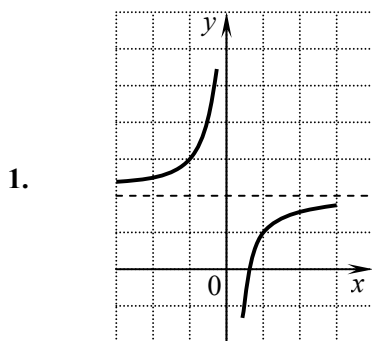
$$\log_4 c = -3,5 \Leftrightarrow c = 4^{-3,5}.$$

Подставим найденное значение c в искомый логарифм:

$$\log_4(64c) = \log_4(4^3 \cdot 4^{-3,5}) = \log_4 4^{3-3,5} = \log_4 4^{-0,5} = -0,5,$$

что и завершает решение.

A4. На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.



Решение. График нечетной функции симметричен относительно точки с координатами $(0; 0)$ — начала координат. Это график, изображенный на рисунке 4.

Правильный ответ: 4.

A5. Найдите производную функции $y = (x - 3) \cos x$.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $y' = \cos x + (x - 3) \sin x$ | 2. $y' = (x - 3) \sin x - \cos x$ |
| 3. $y' = \cos x - (x - 3) \sin x$ | 4. $y' = -\sin x$ |

Решение. Для вычисления производной воспользуемся правилом вычисления производной суммы

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

В нашем случае $f(x) = x - 3$, $g(x) = \cos x$. Найдем производные этих функций: $f'(x) = 1$, $g'(x) = -\sin x$. Поэтому

$$y' = 1 \cdot \cos x + (x - 3)(-\sin x) = \cos x - (x - 3) \sin x.$$

Правильный ответ: 3.

A6. Укажите множество значений функции $y = 2^x + 5$.

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|
| 1. $(5; +\infty)$ | 2. $(0; +\infty)$ | 3. $(-\infty; +\infty)$ | 4. $(7; +\infty)$ |
|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|

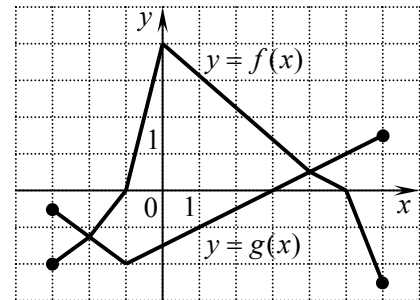
Решение. Множество значений показательной функции 2^x — все положительные числа. Тогда

$$0 < 2^x < +\infty \Rightarrow 5 < 2^x + 5 < +\infty.$$

Правильный ответ: 1.

A7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Укажите множество всех значений x , для которых выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$.

- $[-1; 5]$
- $[-3; 2] \cup [4; 6]$
- $[-3; -1] \cup [5; 6]$
- $[-2; 4]$



Решение. Неравенство $f(x) \geq g(x)$ выполнено на промежутках, где график функции $y = f(x)$ расположен не ниже графика функции $y = g(x)$. Таким промежутком является отрезок $[-2; 4]$.

Правильный ответ: 4.

A8. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{25}{3 - \sqrt[4]{x}}$.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $[0; 3) \cup (3; +\infty)$ | 2. $[0; +\infty)$ |
| 3. $[0; 81) \cup (81; +\infty)$ | 4. $(-\infty; 81) \cup (81; +\infty)$ |

Решение. Поскольку знаменатель дроби должен быть отличен от нуля, область определения функции задается неравенством $3 - \sqrt[4]{x} \neq 0$. Решим его:

$$3 - \sqrt[4]{x} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} \neq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 81.$$

Тем самым область определения функции задается объединением промежутков:

$$[0; 81) \cup (81; +\infty).$$

Правильный ответ: 3.

A9. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(7x - 21) > \log_{\frac{1}{2}}(6x)$.

1. $(-\infty; 21)$ 2. $(3; 21)$ 3. $(3; +\infty)$ 4. $(21; +\infty)$

Решение. Заметим, что основание логарифмов меньше единицы и воспользуемся соответствующей теоремой о решении неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(7x - 21) > \log_{\frac{1}{2}}(6x) &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 21 > 0, \\ 7x - 21 < 6x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < 21 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 21. \end{aligned}$$

Правильный ответ: 2.

A10. Решите уравнение $2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 = 0$.

1. $\pm \frac{4}{3} + 8n, n \in \mathbb{Z}$ 2. $\frac{4}{3} + 8n, n \in \mathbb{Z}$
3. $\pm \frac{2}{3} + 4n, n \in \mathbb{Z}$ 4. $\frac{2}{3} + 4n, n \in \mathbb{Z}$

Решение. Используем формулу корней уравнения $\cos x = a$:

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4}{\pi} \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{3} + 8n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Правильный ответ: 1.

Часть В

B1. Решите уравнение $7 \cdot 5^{\log_5 x} = x + 21$.

Решение. Очевидно, областью определения уравнения является множество $(0; +\infty)$. При $x > 0$ выражение $5^{\log_5 x}$ тождественно равно x , т. е. при $x > 0$ исходное уравнение равносильно уравнению $7x = 21 + x$, значит $6x = 21$; $x = 3,5$. Т. к. $3,5 > 0$, то это значение искомоe.

Ответ: $\{3,5\}$.

В2. Найдите значение выражения $5 \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin \alpha = 0,5$.

Решение. Т. к. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$, а $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$, то

$$5 \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 5(-\sin \alpha) - \sin \alpha = -6 \sin \alpha.$$

Учитывая, что $\sin \alpha = 0,5$, окончательно получаем:

$$5 \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -6 \cdot 0,5 = -3.$$

Ответ: -3 .

В3. Решите уравнение $x^2 \cdot \sqrt{x-1} - 4\sqrt{x-1} = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите сумму всех его корней.)

Решение. В левой части уравнения вынесем за скобки выражения $\sqrt{x-1}$. Получим $\sqrt{x-1} \cdot (x^2 - 4) = 0$.

Второй множитель существует при любых значениях x , а первый — лишь при $x \geq 0$. Значит, данное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x-1=0, \\ \begin{cases} x^2-4=0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Решением уравнения $x-1=0$ является 1. Для решения системы достаточно найти корни уравнения $x^2-4=0$ и отобрать те из них, которые удовлетворяют условию $x-1 \geq 0$. Корнями уравнения $x^2-4=0$, очевидно, являются числа 2 и -2 . Указанному неравенству удовлетворяет только 2. Итак, исходное уравнение имеет два корня: 1 и 2. Их сумма равна 3.

Ответ: 3.

В4. Найдите значение выражения $2^x - y$, если $(x; y)$ является решением системы $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$

Решение. Умножая второе уравнение системы на 2 и складывая с первым уравнением, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{x+1} = 88, \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы найдем значение 2^x :

$$7 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{x+1} = 88 \Leftrightarrow 7 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 88 \Leftrightarrow 11 \cdot 2^x = 88 \Leftrightarrow 2^x = 8.$$

Подставляя полученное значение 2^x в первое уравнение исходной системы, получаем:

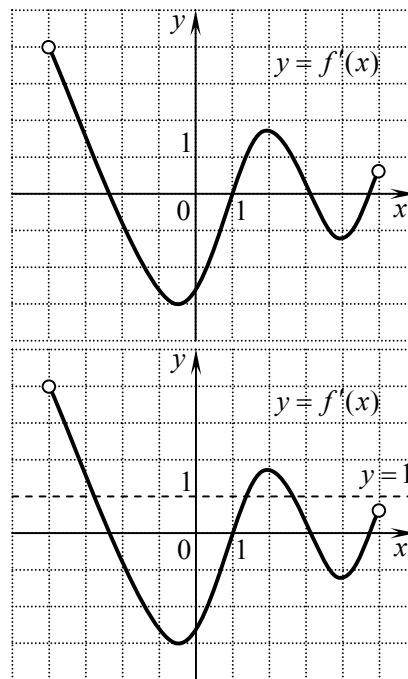
$$7 \cdot 8 + 6y = 2 \Leftrightarrow 6y = -54 \Leftrightarrow y = -9.$$

Тогда значение выражения $2^x - y$ равно $8 + 9 = 17$.

Ответ: 17.

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс.

Решение. Т. к. угловой коэффициент касательной (тангенс угла наклона касательной), проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 , равен $f'(x_0)$, а $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, то для решения задачи достаточно выяснить, сколько точек пересечения имеет график, изображенный на рисунке, и прямая, заданная уравнением $y = 1$. Очевидно, таких точек три. Следовательно, и касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс также будет три.



Ответ: 3.

В6. Найдите значение выражения $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ при $x = 1,2007$.

Решение. Для решения задачи достаточно заметить, что выражение $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ тождественно равно выражению $|\sqrt{x-1} - 1|$. Действительно:

$$\begin{aligned} \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} &= \sqrt{x-1 - 2\sqrt{x-1} + 1} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} - 1|. \end{aligned}$$

Аналогично $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1} + 1|$, и тогда

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1} - 1| + |\sqrt{x-1} + 1|.$$

Воспользовавшись определением модуля, получаем:

$$\begin{aligned} &|\sqrt{x-1} - 1| + |\sqrt{x-1} + 1| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x-1} + 1, & \text{если } \sqrt{x-1} - 1 \geq 0, \\ -\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} + 1, & \text{если } \sqrt{x-1} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & \text{если } \sqrt{x-1} \geq 1, \\ 2, & \text{если } \sqrt{x-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & \text{если } x \geq 2, \\ 2, & \text{если } 1 \leq x < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Т. к. число $1,2007$ принадлежит промежутку $[1; 2)$, то значение исходного выражения равно 2.
 Ответ: 2.

В7. Найдите наименьший корень уравнения $\log_3(x+1)^2 + \log_3|x+1| = 6$.

Решение. Очевидно, что областью определения уравнения являются все действительные числа кроме 0. Выражение $\log_3(x+1)^2$ тождественно равно выражению $2\log_3|x+1|$. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $2\log_3|x+1| + \log_3|x+1| = 6$.

Далее получаем:

$$\begin{aligned} 2\log_3|x+1| + \log_3|x+1| = 6 &\Leftrightarrow 3\log_3|x+1| = 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_3|x+1| = 2 \Leftrightarrow |x+1| = 3^2 \Leftrightarrow |x+1| = 9. \end{aligned}$$

Значит, $x+1=9$ или $x+1=-9$. Откуда получаем $x=8$ или $x=-10$.

Наименьшим из найденных значений является -10 .

Ответ: -10 .

В8. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен двум и $f(1) = 5$. Найдите значение выражения $3f(7) - 4f(-3)$.

Решение. Т. к. период функции $y = f(x)$ равен 2, то $f(x) = f(x+2k)$ для любого x из области определения этой функции и любого целого числа k .

Т. к. 1 входит в область определения функции $y = f(x)$, а $7 = 1 + 2 \cdot 3$; $-3 = 1 + 2 \cdot (-2)$, то 7 и -3 входят в область определения этой функции и $f(-3) = f(1) = f(7) = 5$. Тогда получаем:

$$3 \cdot f(7) - 4 \cdot f(-3) = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = 15 - 20 = -5.$$

Ответ: -5 .

В9. Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11%. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11%) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

Решение: 1 способ. По окончании первого года вкладчик имел на счете $7000 + 0,11 \cdot 7000 = 7770$ рублей. Если не класть на счет дополнительной суммы, то в конце второго года на счете окажется $7770 + 0,11 \cdot 7770 = 8642,7$ рублей. Поэтому на счет необходимо положить такую сумму x , которая через год с учетом процентов даст $10000 - 8642,7 = 1357,3$ рубля.

Искомая величина находится из уравнения $1,11x = 1357,3$, откуда $x = 1229,009\dots$ Это означает, что наименьшая сумма, которую нужно положить на счет, составляет 1240 рублей.

Решение: 2 способ. Иначе: искомая сумма есть наименьшее решение неравенства

$$1,11^2 \cdot 7000 + 1,11x \geq 10000 \Leftrightarrow x \geq 1239,009\dots$$

Ответ: 1240.

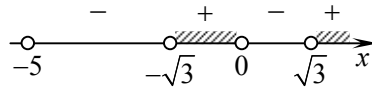
Часть С

С1. Найдите значение функции $f(x) = 10^{\lg \frac{x^3-3x}{x+5} - \log_{\frac{1}{10}}(x+5)}$ в точке максимума.

Решение.

1) Найдем область определения данной функции:

$$\begin{cases} \frac{x^3 - 3x}{x+5} > 0, \\ x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0, \\ x+5 > 0. \end{cases}$$



Область определения функции: $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

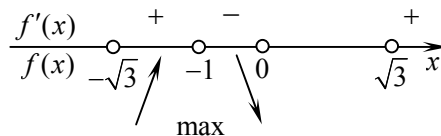
Упростим правую часть формулы, задающей функцию:

$$10^{\frac{\lg x^3 - 3x}{x+5} + \lg(x+5)} = 10^{\lg(x^3 - 3x)} = x^3 - 3x.$$

2) Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in (-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$f'(x) = 0$ при $x = -1$ ($x = 1$ не принадлежит области определения данной функции). Далее имеем:



Таким образом, $x = -1$ — точка максимума. Значение функции в точке максимума равно $f(-1) = 2$.

Ответ: 2.

С2. Решите уравнение $3 \sin 2x \operatorname{tg} x + 4 \cos^2 x = 7 \sin x + 1$

Решение.

1)

$$\begin{aligned} 3 \sin 2x \operatorname{tg} x + 4 \cos^2 x = 7 \sin x + 1 &\Leftrightarrow 6 \sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 4(1 - \sin^2 x) = 7 \sin x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6 \sin^2 x + 4 - 4 \sin^2 x - 7 \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2) $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$.

а) При $\sin x = 3$ уравнение не имеет решения.

б) При $\sin x = 0,5$: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, что удовлетворяет условию $\cos x \neq 0$.

Ответ: $\left\{ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

С3. Найдите все значения x , которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2 < (a+1)x + 3a$ при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $(1; 2)$.

Решение.

Мы имеем квадратное неравенство $(2a-1)x^2 - (a+1)x - 3a < 0$, так как $(2a-1) \neq 0$ при условии $a \in (1; 2)$.

Найдем корни квадратного трехчлена $(2a-1)x^2 - (a+1)x - 3a$:

$$D = (a+1)^2 + 12a(2a-1) = (5a-1)^2, \quad x = \frac{a+1 \pm (5a-1)}{2(2a-1)},$$

откуда $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3a}{2a-1}$.

Выражение $\frac{3a}{2a-1}$ положительно, так как $a > 1$ по условию. Следовательно, $x_2 > x_1$ и решением данного неравенства является промежуток $\left(-1; \frac{3a}{2a-1}\right)$.

Оценим снизу выражение $\frac{3a}{2a-1}$:

$$\frac{3a}{2a-1} = \frac{3a - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{2a-1} = \frac{3\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}}{2\left(a - \frac{1}{2}\right)} = \frac{3\left(a - \frac{1}{2}\right)}{2\left(a - \frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2(2a-1)} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4a-2}.$$

Далее имеем: $1 < a < 2 \Leftrightarrow 4 < 4a < 8 \Leftrightarrow 2 < 4a - 2 < 6$, откуда

$$\frac{1}{4a-2} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{3}{4a-2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{3}{4a-2} > 2.$$

Таким образом, при любом значении параметра a , принадлежащем промежутку $(1; 2)$, верхняя граница промежутка $\left(-1; \frac{3a}{2a-1}\right)$ больше 2. Значит, все значения x из промежутка $(1; 2]$ удовлетворяют данному неравенству.
 Ответ: $(1; 2]$.

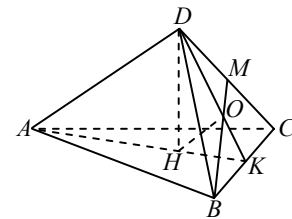
С4. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

Решение.

1) Пусть $DABC$ — данная правильная пирамида, DK — ее апофема, DH — высота, и пусть основание конуса вписано в боковую грань BKD (см. рис.).

Тогда:

- по свойству правильной пирамиды, точка H — центр треугольника ABC , следовательно, точка H принадлежит высоте (медиане, биссектрисе) AK треугольника ABC ;
- отрезок DK является высотой, медианой и биссектрисой равнобедренного треугольника BKD ;
- основание O высоты HO конуса является центром окружности, вписанной в треугольник BKD , следовательно, O — точка пересечения биссектрис DK и BM этого треугольника. Кроме того, отрезок HK является радиусом окружности, вписанной в правильный треугольник ABC , а отрезок OK — радиусом окружности, вписанной в равнобедренный треугольник BKD , т. е. искомым радиусом основания конуса.



2) Обозначим через a , b и d соответственно длину стороны основания данной пирамиды, длину ее бокового ребра и ее апофему, а через x — радиус основания конуса. Тогда имеем:

а) отрезок HK — радиус окружности, вписанной в правильный треугольник ABC , следовательно,

$$HK = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

б) так как $HO \perp (BDK)$, отрезок HO — высота прямоугольного треугольника DHK , проведенная из

вершины его прямого угла H , следовательно, $HK^2 = OK \cdot DK$, т. е. $\frac{a^2}{12} = dx$, откуда $x = \frac{a^2}{12d} = \frac{7}{3d}$;

в) отрезок OK — радиус окружности, вписанной в треугольник DCB , следовательно, $OK = \frac{S}{p}$, где

S — площадь треугольника BCD , p — его полупериметр, откуда $x = \frac{ad}{a+2b} = \frac{d\sqrt{7}}{b+\sqrt{7}}$ (*);

г) приравняв найденные в п. б) и в) значения x , получаем $\frac{d\sqrt{7}}{b+\sqrt{7}} = \frac{7}{3d}$, откуда $3d^2 = b\sqrt{7} + 7$; (1)

д) из прямоугольного треугольника BDK находим: $DK^2 = BD^2 - BK^2$, т. е. $d^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = b^2 - 7$; (2)

е) решаем систему уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} 3d^2 = b\sqrt{7} + 7, \\ d^2 = b^2 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow_{b>0, d>0} \begin{cases} b = \frac{4\sqrt{7}}{3}, \\ d = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

ж) окончательно имеем $x = \frac{7}{3d} = 1$.

Ответ. 1.

Примечание. Соотношение (*) можно было получить, применив свойство биссектрисы треугольника к биссектрисе BO треугольника BDK (см. рис.): $\frac{OK}{OD} = \frac{BK}{BD}$.

С5. Найдите количество всех решений системы уравнений
$$\begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0, \\ 2x - \frac{10}{x \log_y 2} = 5 \log_{32}(0,125y^2) - 7. \end{cases}$$

Решение.

1) ОДЗ: $x \neq 0$; $y > 0$, $y \neq 1$. (*)

2) При условии (*) имеем:

$$2x - \frac{10}{x \log_y 2} = 5 \log_{32}(0,125y^2) - 7 \Leftrightarrow 2x - \frac{10}{x \log_y 2} = 5 \log_{32}(0,125y^2) - 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{10}{x} \cdot \log_2 y = 2 \log_2 y - 3 - 7 \Leftrightarrow x^2 + (5 - \log_2 y)x - 5 \log_2 y = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x - \log_2 y) = 0. (2)$$

а) Если $x = -5$, тогда первое уравнение системы, (назовем его уравнением (1)), принимает вид $36y - 125 = 0$, откуда $y = \frac{125}{36} > 0$. Значит, $\left(-5; \frac{125}{36}\right)$ — решение данной системы.

б) Если $x = \log_2 y$, $y = 2^x$ и уравнение (1) имеет вид $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0$. Если $x > 0$, то $x^3 > 0$ и $2^x(1-x)^2 + x^3 > 0$, т. е. положительных корней уравнение (1) не имеет. Если $x < 0$, то $1-x \neq 0$ и $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -x^3(1-x)^{-2}$. (3)

3) Функция $y = 2^x$ возрастает, так как $2 > 1$.

Исследуем функцию $y = -x^3(1-x)^{-2}$:

$$\begin{aligned} y' &= -3x^2(1-x)^{-2} - x^3(-2)(1-x)^{-3}(-1) = -x^2(1-x)^{-3}(3(1-x) + 2) = \\ &= -x^2(1-x)^{-3}(3-x). \end{aligned}$$

При $x < 0$ имеем $x^2 > 0$, $3-x > 0$, $(1-x)^{-3} > 0$. Значит, $y' < 0$ при $x < 0$, и, так как функция $y = -x^3(1-x)^{-2}$ непрерывна на промежутке $(-\infty; 0]$, она убывает на этом промежутке. Таким образом, уравнение $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0$ имеет не более одного корня.

4) Если $x = -3$, то $2^x = \frac{1}{8}$, $-x^3(1-x)^{-2} = \frac{27}{16}$ и $2^x < -x^3(1-x)^{-2}$. Если же $x = 0$, то $2^x = 1$, $-x^3(1-x)^{-2} = 0$ и $2^x > -x^3(1-x)^{-2}$.

Так как обе функции являются непрерывными, то имеется единственный корень x_0 уравнения (3), причем $-3 < x_0 < 0$, т. е. $x_0 \neq -5$. При этом $y_0 = 2^{x_0} > 0$. Таким образом, исходная система имеет ровно два решения $(x_0; 2^{x_0})$ и $\left(-5; \frac{125}{36}\right)$.

Ответ: система имеет ровно два решения.