Единый государственный экзамен по математике, 2007 год демонстрационная версия

Часть А

A1. Найдите значение выражения $4^{6p} \cdot 4^{-4p}$ при $p = \frac{1}{4}$.

1. 1 **2.** 2 **3.** 32 **4.** 34

Решение. Используем свойство степени с одинаковым основанием: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. В нашем случае

$$4^{6p} \cdot 4^{-4p} = 4^{6p-4p} = 4^{2p}.$$

Подставим в полученное выражение $p = \frac{1}{4}$, имеем

$$4^{2\cdot\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

Правильный ответ: 2.

A2. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$.

1. 1,2 **2.** $\frac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{5}$ **3.** 2,4 **4.** $\sqrt[3]{2}$

Решение. Используя свойство $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, получим:

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{54}{250}} = \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{3}{5}.$$

Осталось вычислить произведение:

$$\frac{3}{5} \cdot \sqrt{16} = \frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Правильный ответ: 3.

А3. Найдите значение выражения $\log_4(64c)$, если $\log_4 c = -3,5$.

1. $-6,5$ **2.** $-0,5$ **3.** $-10,5$ **4.** $-67,5$

Решение. Воспользуемся формулой логарифма произведения:

$$\log_4(64c) = \log_4 64 + \log_4 c = 3 + (-3,5) = -0,5\,.$$

Правильный ответ: 2.

Примечание. Возможен другой способ рассуждения: воспользуемся равенством $\log_4 c = -3,5$, рассматривая его как уравнение на переменную *c*:

$$\log_4 c = -3,5 \Leftrightarrow c = 4^{-3,5}\,.$$

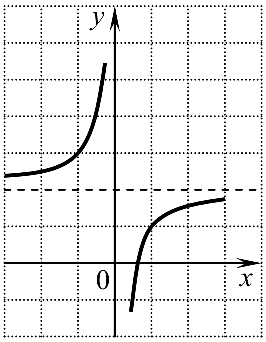
Подставим найденное значение с в искомый логарифм:

$$\log_4(64c) = \log_4(4^3 \cdot 4^{-3,5}) = \log_4 4^{3-3,5} = \log_4 4^{-0,5} = -0,5\,,$$

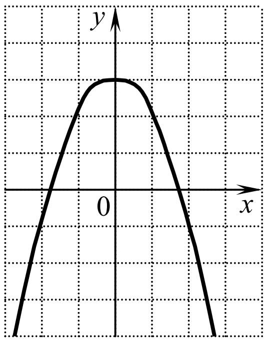
что и завершает решение.

А4. На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

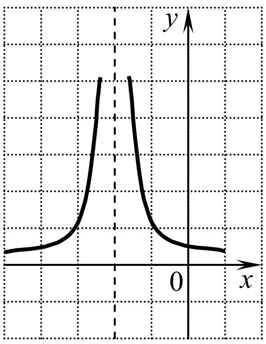
1.



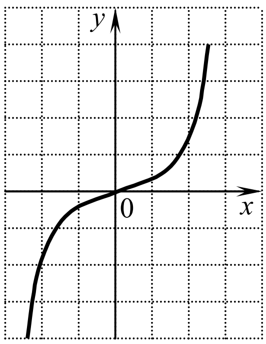
2.



3.



4.



Решение. График нечетной функции симметричен относительно точки с координатами (0; 0) — начала координат. Это график, изображенный на рисунке 4.

Правильный ответ: 4.

А5. Найдите производную функции $y = (x-3)\cos x$.

1.	$y' = \cos x + (x-3)\sin x$	**2.**	$y' = (x-3)\sin x - \cos x$
3.	$y' = \cos x - (x-3)\sin x$	**4.**	$y' = -\sin x$

Решение. Для вычисления производной воспользуемся правилом вычисления производной суммы

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

В нашем случае $f(x) = x - 3$, $g(x) = \cos x$. Найдем производные этих функций: $f'(x) = 1$, $g'(x) = -\sin x$. Поэтому

$$y' = 1 \cdot \cos x + (x-3)(-\sin x) = \cos x - (x-3)\sin x.$$

Правильный ответ: 3.

А6. Укажите множество значений функции $y = 2^x + 5$.

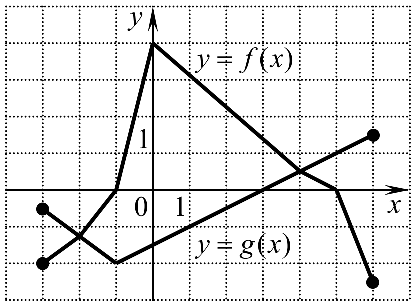
1.	$(5; +\infty)$	**2.**	$(0; +\infty)$	**3.**	$(-\infty; +\infty)$	**4.**	$(7; +\infty)$

Решение. Множество значений показательной функции 2^x — все положительные числа. Тогда

$$0 < 2^x < +\infty \text{ ? } 5 < 2^x + 5 < +\infty.$$

Правильный ответ: 1.

А7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Укажите множество всех значений x, для которых выполняется неравенство $f(x) \ge g(x)$.



1. $[-1; 5]$
2. $[-3; 2] \cup [4; 6]$
3. $[-3; -1] \cup [5; 6]$
4. $[-2; 4]$

Решение. Неравенство $f(x) \ge g(x)$ выполнено на промежутках, где график функции $y = f(x)$ расположен не ниже графика функции $y = g(x)$. Таким промежутком является отрезок $[-2; 4]$.
Правильный ответ: 4.

А8. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{25}{3 - \sqrt[4]{x}}$.

1.	$[0; 3) \cup (3; +\infty)$	**2.**	$[0; +\infty)$
3.	$[0; 81) \cup (81; +\infty)$	**4.**	$(-\infty; 81) \cup (81; +\infty)$

Решение. Поскольку знаменатель дроби должен быть отличен от нуля, область определения функции задается неравенством $3 - \sqrt[4]{x} \ne 0$. Решим его:

$$3-\sqrt[4]{x}\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x}\neq 3 \Leftrightarrow 0\le x\neq 81 .$$

Тем самым область определения функции задается объединением промежутков:

$$[0;\,81)\cup(81;\,+\infty).$$

Правильный ответ: 3.

A9. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(7x-21)>\log_{\frac{1}{2}}(6x)$.

1.	$(-\infty;\,21)$	**2.**	$(3;\,21)$	**3.**	$(3;\,+\infty)$	**4.**	$(21;\,+\infty)$

Решение. Заметим, что основание логарифмов меньше единицы и воспользуемся соответствующей теоремой о решении неравенств вида $\log_a f(x)>\log_a g(x)$:

$$\log_{\frac{1}{2}}(7x-21)>\log_{\frac{1}{2}}(6x)\Leftrightarrow\begin{cases}7x-21>0,\\ 7x-21<6x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>3,\\ x<21\end{cases}\Leftrightarrow 3<x<21.$$

Правильный ответ: 2.

A10. Решите уравнение $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)-1=0$.

1.	$\pm\dfrac{4}{3}+8n,\ n\in\mathbb{Z}$	**2.**	$\dfrac{4}{3}+8n,\ n\in\mathbb{Z}$
3.	$\pm\dfrac{2}{3}+4n,\ n\in\mathbb{Z}$	**4.**	$\dfrac{2}{3}+4n,\ n\in\mathbb{Z}$

Решение. Используем формулу корней уравнения $\cos x=a$:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1=0\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4}{\pi}\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{3}+8n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Правильный ответ: 1.

Часть B

B1. Решите уравнение $7\cdot 5^{\log_5 x}=x+21$.

Решение. Очевидно, областью определения уравнения является множество $(0;+\infty)$. При $x>0$ выражение $5^{\log_5 x}$ тождественно равно *x*, т. е. при $x>0$ исходное уравнение равносильно уравнению $7x=21+x$, значит $6x=21$; $x=3{,}5$. Т. к. $3{,}5>0$, то эта значение искомое.
Ответ: $\{3{,}5\}$.

B2. Найдите значение выражения $5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=0,5$.

Решение. Т. к. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$, а $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$, то

$$5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=5(-\sin\alpha)-\sin\alpha=-6\sin\alpha .$$

Учитывая, что $\sin\alpha=0,5$, окончательно получаем:

$$5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-6\cdot 0,5=-3 .$$

Ответ: -3.

B3. Решите уравнение $x^2\cdot\sqrt{x-1}-4\sqrt{x-1}=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите сумму всех его корней.)

Решение. В левой части уравнения вынесем за скобки выражения $\sqrt{x-1}$. Получим $\sqrt{x-1}\cdot(x^2-4)=0$.

Второй множитель существует при любых значениях *x*, а первый — лишь при $x\ge 0$. Значит, данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ \begin{cases} x^2-4=0, \\ x-1\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением уравнения $x-1=0$ является 1. Для решения системы достаточно найти корни уравнения $x^2-4=0$ и отобрать те из них, которые удовлетворяют условию $x-1\ge 0$. Корнями уравнения $x^2-4=0$, очевидно, являются числа 2 и -2. Указанному неравенству удовлетворяет только 2. Итак, исходное уравнение имеет два корня: 1 и 2. Их сумма равна 3.

Ответ: 3.

B4. Найдите значение выражения 2^x-y, если $(x;\, y)$ является решением системы $\begin{cases} 7\cdot 2^x+6y=2, \\ 2^{x+1}-3y=43. \end{cases}$

Решение. Умножая второе уравнение системы на 2 и складывая с первым уравнением, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 7\cdot 2^x+2\cdot 2^{x+1}=88, \\ 2^{x+1}-3y=43. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы найдем значение 2^x:

$$7\cdot 2^x+2\cdot 2^{x+1}=88 \Leftrightarrow 7\cdot 2^x+4\cdot 2^x=88 \Leftrightarrow 11\cdot 2^x=88 \Leftrightarrow 2^x=8 .$$

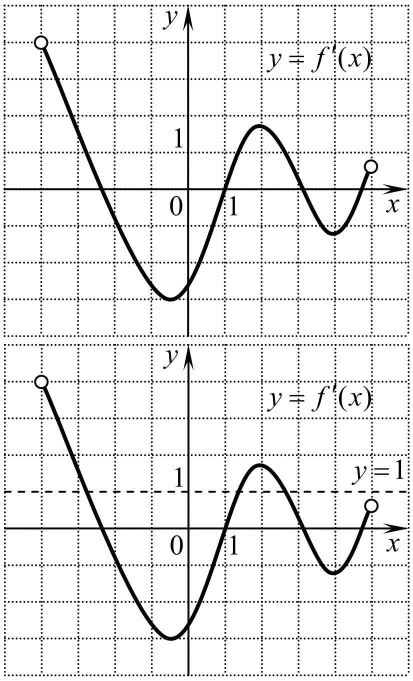
Подставляя полученное значение 2^x в первое уравнение исходной системы, получаем:

$$7\cdot 8+6y=2 \Leftrightarrow 6y=-54 \Leftrightarrow y=-9 .$$

Тогда значение выражения 2^x-y равно $8+9=17$.

Ответ: 17.

B5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в $45°$ к положительному направлению оси абсцисс.



Решение. Т. к. угловой коэффициент касательной (тангенс угла наклона касательной), проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, равен $f'(x_0)$, а $\operatorname{tg} 45° = 1$, то для решения задачи достаточно выяснить, сколько точек пересечения имеет график, изображенный на рисунке, и прямая, заданная уравнением $y = 1$. Очевидно, таких точек три. Следовательно, и касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в $45°$ к положительному направлению оси абсцисс также будет три.

Ответ: 3.

B6. Найдите значение выражения $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ при $x = 1,2007$.

Решение. Для решения задачи достаточно заметить, что выражение $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ тождественно равно выражению $|\sqrt{x-1} - 1|$. Действительно:

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1} =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} - 1|.$$

Аналогично $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1} + 1|$, и тогда

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1} - 1| + |\sqrt{x-1} + 1|.$$

Воспользовавшись определением модуля, получаем:

$$|\sqrt{x-1} - 1| + |\sqrt{x-1} + 1| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x-1} + 1, \text{ если } \sqrt{x-1} - 1 \geq 0, \\ -\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} + 1, \text{ если } \sqrt{x-1} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, \text{ если } \sqrt{x-1} \geq 1, \\ 2, \text{ если } \sqrt{x-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, \text{ если } x \geq 2, \\ 2, \text{ если } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Т. к. число 1,2007 принадлежит промежутку $[1; 2)$, то значение исходного выражения равно 2.

Ответ: 2.

B7. Найдите наименьший корень уравнения $\log_3(x+1)^2 + \log_3|x+1| = 6$.

Решение. Очевидно, что областью определения уравнения являются все действительные числа кроме 0. Выражение $\log_3(x+1)^2$ тождественно равно выражению $2\log_3|x+1|$. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $2\log_3|x+1| + \log_3|x+1| = 6$.

Далее получаем:

$$2\log_3|x+1| + \log_3|x+1| = 6 \Leftrightarrow 3\log_3|x+1| = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3|x+1| = 2 \Leftrightarrow |x+1| = 3^2 \Leftrightarrow |x+1| = 9.$$

Значит, $x+1=9$ или $x+1=-9$. Откуда получаем $x=8$ или $x=-10$.

Наименьшим из найденных значений является -10.

Ответ: -10.

B8. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен двум и $f(1)=5$. Найдите значение выражения $3f(7)-4f(-3)$.

Решение. Т. к. период функции $y=f(x)$ равен 2, то $f(x)=f(x+2k)$ для любого x из области определения этой функции и любого целого числа *k*.

Т. к. 1 входит в область определения функции $y=f(x)$, а $7=1+2\cdot3$; $-3=1+2\cdot(-2)$, то 7 и -3 входят в область определения этой функции и $f(-3)=f(1)=f(7)=5$. Тогда получаем:

$$3\cdot f(7)-4\cdot f(-3)=3\cdot5-4\cdot5=15-20=-5.$$

Ответ: -5.

B9. Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11 %. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11 %) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

Решение: 1 способ. По окончании первого года вкладчик имел на счете $7000+0{,}11\cdot7000=7770$ рублей. Если не класть на счет дополнительной суммы, то в конце второго года на счете окажется $7777+0{,}11\cdot7770=8642{,}7$ рублей. Поэтому на счет необходимо положить такую сумму x, которая через год с учетом процентов даст $10000-8642{,}7=1375{,}3$ рубля.

Искомая величина находится из уравнения $1{,}11x=1375{,}3$, откуда $x=1239{,}009\ldots$ Это означает, что наименьшая сумма, которую нужно положить на счет, составляет 1240 рублей.

Решение: 2 способ. Иначе: искомая сумма есть наименьшее решение неравенства

$$1{,}11^2\cdot7000+1{,}11x\ge10000 \Leftrightarrow x\ge1239{,}009\ldots.$$

Ответ: 1240.

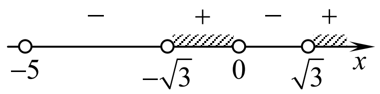
Часть C

C1. Найдите значение функции $f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{\frac{1}{10}}(x+5)}$ в точке максимума.

Решение.

1) Найдем область определения данной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3-3x}{x+5} > 0, \\ x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0, \\ x+5 > 0. \end{cases}$$



Область определения функции: $(-\sqrt{3};\,0) \cup (\sqrt{3};\,+\infty)$.

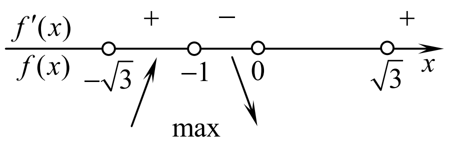
Упростим правую часть формулы, задающей функцию:

$$10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}+\lg(x+5)} = 10^{\lg(x^3-3x)} = x^3-3x.$$

2) Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in (-\sqrt{3};\,0) \cup (\sqrt{3};\,+\infty)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$f'(x) = 0$ при $x = -1$ ($x = 1$ не принадлежит области определения данной функции). Далее имеем:



Таким образом, $x = -1$ — точка максимума. Значение функции в точке максимума равно $f(-1) = 2$.

Ответ: 2.

С2. Решите уравнение $3\sin 2x \operatorname{tg} x + 4\cos^2 x = 7\sin x + 1$

Решение.

1)

$$3\sin 2x \operatorname{tg} x + 4\cos^2 x = 7\sin x + 1 \Leftrightarrow 6\sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 4(1-\sin^2 x) = 7\sin x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin^2 x + 4 - 4\sin^2 x - 7\sin x - 1 = 0, \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0, \\ \cos x \ne 0. \end{cases}$$

2) $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

а) При $\sin x = 3$ уравнение не имеет решения.

б) При $\sin x = 0{,}5$: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, что удовлетворяет условию $\cos x \ne 0$.

Ответ: $\left\{ (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

С3. Найдите все значения *x*, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2 < (a+1)x + 3a$ при любом значении параметра *a*, принадлежащем промежутку $(1;\,2)$.

Решение.

Мы имеем квадратное неравенство $(2a-1)x^2-(a+1)x-3a<0$, так как $(2a-1)\neq 0$ при условии $a\in(1;\,2)$.

Найдем корни квадратного трехчлена $(2a-1)x^2-(a+1)x-3a$:

$$D=(a+1)^2+12a(2a-1)=(5a-1)^2,\ x=\frac{a+1\pm(5a-1)}{2(2a-1)},$$

откуда $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{3a}{2a-1}$.

Выражение $\dfrac{3a}{2a-1}$ положительно, так как $a>1$ по условию. Следовательно, $x_2>x_1$ и решением данного неравенства является промежуток $\left(-1;\,\dfrac{3a}{2a-1}\right)$.

Оценим снизу выражение $\dfrac{3a}{2a-1}$:

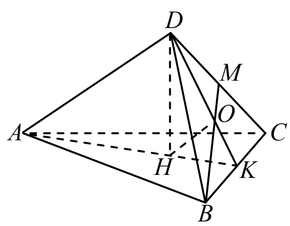
$$\frac{3a}{2a-1}=\frac{3a-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{2a-1}=\frac{3\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{2\left(a-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3\left(a-\frac{1}{2}\right)}{2\left(a-\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{2(2a-1)}=\frac{3}{2}+\frac{3}{4a-2}.$$

Далее имеем: $1<a<2\Leftrightarrow 4<4a<8\Leftrightarrow 2<4a-2<6$, откуда

$$\frac{1}{4a-2}>\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{3}{4a-2}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{3}{4a-2}>2.$$

Таким образом, при любом значении параметра *a*, принадлежащем промежутку $(1;\,2)$, верхняя граница промежутка $\left(-1;\,\dfrac{3a}{2a-1}\right)$ больше 2. Значит, все значения *x* из промежутка $(1;\,2]$ удовлетворяют данному неравенству.
Ответ: $(1;\,2]$.

С4. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.



Решение.

1) Пусть *DABC* — данная правильная пирамида, *DK* — ее апофема, *DH* — высота, и пусть основание конуса вписано в боковую грань *BCD* (см. рис.).

Тогда:

а) по свойству правильной пирамиды, точка *H* — центр треугольника *ABC*, следовательно, точка *H* принадлежит высоте (медиане, биссектрисе) *AK* треугольника *ABC*;

б) отрезок *DK* является высотой, медианой и биссектрисой равнобедренного треугольника *BCD*;

в) основание *O* высоты *HO* конуса является центром окружности, вписанной в треугольник *BCD*, следовательно, *O* — точка пересечения биссектрис *DK* и *BM* этого треугольника. Кроме того, отрезок *HK* является радиусом окружности, вписанной в правильный треугольник *ABC*, а отрезок *OK* — радиусом окружности, вписанной в равнобедренный треугольник *BCD*, т. е. искомым радиусом основания конуса.

2) Обозначим через a, b и d соответственно длину стороны основания данной пирамиды, длину ее бокового ребра и ее апофему, а через x — радиус основания конуса. Тогда имеем:
а) отрезок HK — радиус окружности, вписанной в правильный треугольник ABC, следовательно, $HK=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$;
б) так как $HO\perp(BDK)$, отрезок HO — высота прямоугольного треугольника DHK, проведенная из вершины его прямого угла H, следовательно, $HK^2=OK\cdot DK$, т. е. $\dfrac{a^2}{12}=dx$, откуда $x=\dfrac{a^2}{12d}=\dfrac{7}{3d}$;
в) отрезок OK — радиус окружности, вписанной в треугольник DCB, следовательно, $OK=\dfrac{S}{p}$, где S — площадь треугольника BCD, p — его полупериметр, откуда $x=\dfrac{ad}{a+2b}=\dfrac{d\sqrt{7}}{b+\sqrt{7}}$ (*);
г) приравнивая найденные в п. б) и в) значения x, получаем $\dfrac{d\sqrt{7}}{b+\sqrt{7}}=\dfrac{7}{3d}$, откуда $3d^2=b\sqrt{7}+7$; (1)
д) из прямоугольного треугольника BDK находим: $DK^2=BD^2-BK^2$, т. е. $d^2=b^2-\dfrac{a^2}{4}=b^2-7$; (2)
е) решаем систему уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases}3d^2=b\sqrt{7}+7,\\ d^2=b^2-7\end{cases}\underset{b>0,\,d>0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}b=\dfrac{4\sqrt{7}}{3},\\ d=\dfrac{7}{3}.\end{cases}$$

ж) окончательно имеем $x=\dfrac{7}{3d}=1$.
Ответ. 1.
Примечание. Соотношение (*) можно было получить, применив свойство биссектрисы треугольника к биссектрисе BO треугольника BDK (см. рис.): $\dfrac{OK}{OD}=\dfrac{BK}{BD}$.

C5. Найдите количество всех решений системы уравнений $\begin{cases}y(1-x)^2+x^3=0,\\ 2x-\dfrac{10}{x\log_y 2}=5\log_{32}(0{,}125y^2)-7.\end{cases}$

Решение.
1) ОДЗ: $x\neq 0$; $y>0$, $y\neq 1$. (*)
2) При условии (*) имеем:

$$2x-\frac{10}{x\log_y 2}=5\log_{32}(0{,}125y^2)-7\Leftrightarrow 2x-\frac{10}{x\log_y 2}=5\log_{32}(0{,}125y^2)-7\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{10}{x}\cdot\log_2 y=2\log_2 y-3-7\Leftrightarrow x^2+(5-\log_2 y)x-5\log_2 y=0\Leftrightarrow(x+5)(x-\log_2 y)=0.\ (2)$$

а) Если $x=-5$, тогда первое уравнение системы, (назовем его уравнением (1)), принимает вид $36y-125=0$, откуда $y=\dfrac{125}{36}>0$. Значит, $\left(-5;\dfrac{125}{36}\right)$ — решение данной системы.

б) Если $x=\log_2 y$, $y=2^x$ и уравнение (1) имеет вид $2^x(1-x)^2+x^3=0$. Если $x>0$, то $x^3>0$ и $2^x(1-x)^2+x^3>0$, т. е. положительных корней уравнение (1) не имеет. Если $x<0$, то $1-x\neq 0$ и $2^x(1-x)^2+x^3=0 \Leftrightarrow 2^x=-x^3(1-x)^{-2}$. (3)

3) Функция $y=2^x$ возрастает, так как $2>1$.

Исследуем функцию $y=-x^3(1-x)^{-2}$:

$$y'=-3x^2(1-x)^{-2}-x^3(-2)(1-x)^{-3}(-1)=-x^2(1-x)^{-3}(3(1-x)+2)=$$
$$=-x^2(1-x)^{-3}(3-x).$$

При $x<0$ имеем $x^2>0$, $3-x>0$, $(1-x)^{-3}>0$. Значит, $y'<0$ при $x<0$, и, так как функция $y=-x^3(1-x)^{-2}$ непрерывна на промежутке $(-\infty;0]$, она убывает на этом промежутке. Таким образом, уравнение $2^x(1-x)^2+x^3=0$ имеет не более одного корня.

4) Если $x=-3$, то $2^x=\frac{1}{8}$, $-x^3(1-x)^{-2}=\frac{27}{16}$ и $2^x<-x^3(1-x)^{-2}$. Если же $x=0$, то $2^x=1$, $-x^3(1-x)^{-2}=0$ и $2^x>-x^3(1-x)^{-2}$.

Так как обе функции являются непрерывными, то имеется единственный корень x_0 уравнения (3), причем $-3<x_0<0$, т. е. $x_0\neq -5$. При этом $y_0=2^{x_0}>0$. Таким образом, исходная система имеет ровно два решения $(x_0;\,2^{x_0})$ и $\left(-5;\,\frac{125}{36}\right)$.

Ответ: система имеет ровно два решения.