Единый государственный экзамен по математике, 2001 год демонстрационная версия

Часть A

A1. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{625}+\sqrt{16}-\sqrt[3]{40}-\sqrt{25}$.

1. $4\sqrt[3]{5}+9$ **2.** $3\sqrt[3]{5}-1$ **3.** $3\sqrt[3]{5}+9$ **4.** $7\sqrt[3]{5}-1$

$$\sqrt[3]{625}+\sqrt{16}-\sqrt[3]{40}-\sqrt{25}=\sqrt[3]{5^4}+4-\sqrt[3]{5\cdot 2^3}-5=5\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}-1=3\sqrt[3]{5}-1.$$

Правильный ответ: 2.

A2. Упростите выражение $\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-2\cos(2\pi-\alpha)$.

1. 0 **2.** $\sin\alpha-\cos\alpha$ **3.** $-2\cos\alpha$ **4.** $-4\cos\alpha$

$$\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-2\cos(2\pi-\alpha)=-\cos\alpha+(-\cos\alpha)-2\cos\alpha=$$
$$=-\cos\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha=-4\cos\alpha.$$

Правильный ответ: 4.

A3. Выполните действия $(a^{0,25})^3\cdot\sqrt[8]{a}$.

1. $a^{\frac{7}{8}}$ **2.** $a^{\frac{7}{4}}$ **3.** $a^{\frac{25}{8}}$ **4.** $a^{\frac{3}{2}}$

$$(a^{0,25})^3\cdot\sqrt[8]{a}=a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}}=a^{\frac{7}{8}}.$$

Правильный ответ: 1.

A4. Упростите выражение $\log_6 48-\log_6 4+\log_6 3$.

1. 47 **2.** 36 **3.** 2 **4.** 4

$$\log_6 48-\log_6 4+\log_6 3=\log_6\left(\frac{48\cdot 3}{4}\right)=\log_6 36=2.$$

Правильный ответ: 3.

A5. Решите неравенство $\log_3(x-3) > \log_3(4-x)$.

1. $(3;\,4)$ **2.** $\left(\dfrac{7}{2};\,4\right)$ **3.** $(3;\,+\infty)$ **4.** $\left(\dfrac{7}{2};\,+\infty\right)$

$$\log_3(x-3) > \log_3(4-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0, \\ 4-x>0, \\ x-3>4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x<4, \\ 2x-7>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x<4, \\ x>\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4, \\ x>\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{2}<x<4.$$

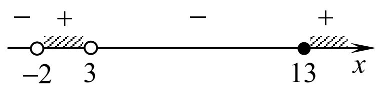
Правильный ответ: 4.

A6. Решите неравенство $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}\ge 0$.

1. $[13;\,+\infty)$ **2.** $[-2;\,3)\cup(13;\,+\infty)$ **3.** $(-2;\,3]\cup[13;\,+\infty)$ **4.** $(-2;\,3)\cup[13;\,+\infty)$

$$\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x-3}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-3)-2(x+2)}{(x+2)(x-3)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-13}{(x+2)(x-3)}\ge 0$$



Правильный ответ: 4.

A7. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-\dfrac{1}{2}}$.

1. $(-\infty;\,2]$ **2.** $[2;\,+\infty)$ **3.** $[4;\,+\infty)$ **4.** $(-\infty;\,4]$

Область определения функции задается неравенством $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-\dfrac{1}{2}\ge 0$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-\frac{1}{2}\ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}\ge\frac{1}{2} \underset{\frac{1}{2}<1}{\Leftrightarrow} x-3\le 1 \Leftrightarrow x\le 4.$$

Правильный ответ: 4.

A8. Найдите область значений функции $y=2\sin x+1$.

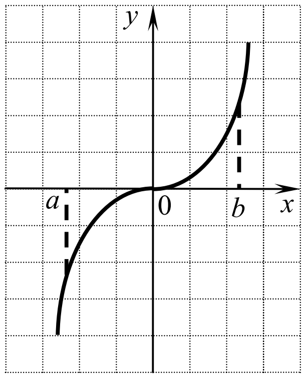
1. $[-1;\,3]$ **2.** $[-2;\,3]$ **3.** $[2;\,3]$ **4.** $[-1;\,2]$

$$-1\le\sin x\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2\sin x\le 2 \Leftrightarrow -1\le 2\sin x+1\le 3.$$

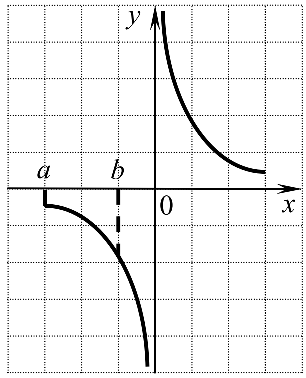
Правильный ответ: 1.

A9. Какие функции возрастают на промежутке $[a; b]$?

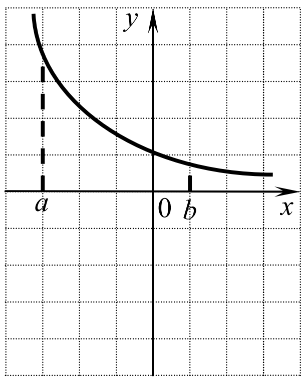
1.



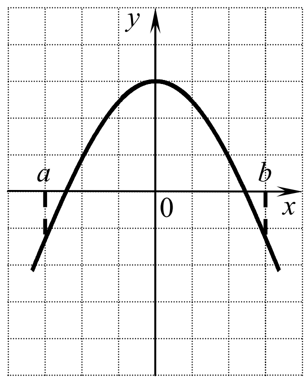
2.



3.



4.

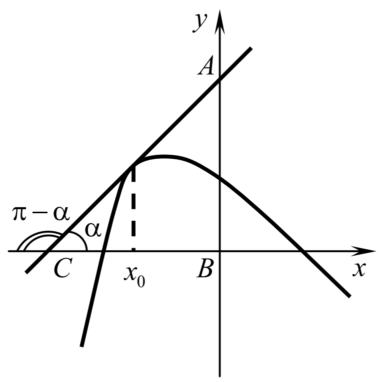


Решение: функция, график которой изображен на рисунке 1, возрастает на промежутке $[a; b]$. Функции, графики которых изображены на рисунках 2 и 3, убывают на промежутке $[a; b]$. Функция, график которой изображен на рисунке 4, не является монотонной на промежутке $[a; b]$. Правильный ответ: 1.

A10. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

1. -2 **2.** 2 **3.** -1 **4.** 1

Значение производной в точке касания равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной в этой точке. Найдем его:



$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha .$$

Значение $\operatorname{tg}\alpha$ из треугольника ABC (см. рис.) равно отношению $\frac{AB}{BC}$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{4} = 1,$$

следовательно, $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -1$.

Правильный ответ: 3.

A11. Найдите производную функции $h(x)=x^2+3\sin x$.

1. $h'(x)=x^3-3\cos x$ **2.** $h'(x)=2x+3\cos x$ **3.** $h'(x)=2x+\cos x$ **4.** $h'(x)=\frac{1}{3}x^3-\cos x$

$$h'(x)=2x+3\cos x.$$

Правильный ответ: 2.

A12. Для функции $f(x)=-3\cos x$ укажите первообразную, которая проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2};-12\right)$.

1. $F(x)=3\cos x-12$ **2.** $F(x)=3\sin x-9$ **3.** $F(x)=-3\sin x-9$ **4.** $F(x)=3\sin x-12$

Найдем первообразную:

$$F(x)=-3\sin x+C.$$

Найдем C:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-12\Leftrightarrow -3\sin\frac{\pi}{2}+C=-12\Leftrightarrow -3+C=-12\Leftrightarrow C=-9.$$

Таким образом,

$$F(x)=-3\sin x-9.$$

Правильный ответ: 3.

Часть B

B1. Найдите корни уравнения $2\cos x-\cos^2 x=\sin^2 x$, принадлежащие промежутку $[0°;\ 270°]$.

$$2\cos x-\cos^2 x=\sin^2 x\Leftrightarrow 2\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x\Leftrightarrow 2\cos x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, \\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ k,n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Отберем корни, решая двойные неравенства:

$$0\le\frac{\pi}{3}+2\pi k\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le k\le\frac{7}{12}\Leftrightarrow k=0,$$

$$0\le-\frac{\pi}{3}+2\pi n\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{6}\le n\le\frac{11}{12}, \text{ решений нет.}$$

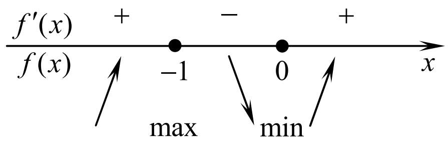
Тогда уравнение имеет единственное решение $\frac{\pi}{3}=60^\circ$.

Ответ: 60°.

B2. Найдите точку максимума функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1);$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 0. \end{array}\right.$$



Ответ: точка максимума: -1.

B3. Найдите наименьший корень уравнения $2^{|x+4|} - 8 = 0$.

Решим уравнение

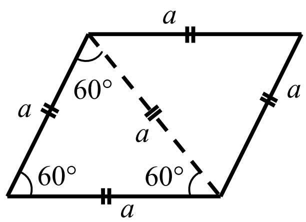
$$2^{|x+4|} - 8 = 0 \Leftrightarrow 2^{|x+4|} = 2^3 \Leftrightarrow |x+4| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+4 = -3, \\ x+4 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Таким образом, наименьшим корнем уравнения является -7.

Ответ: -7.

B4. Острый угол ромба равен $60°$, а площадь — $18\sqrt{3}$. Найдите меньшую диагональ ромба.

Пусть сторона ромба равна a, $a > 0$. Меньшая диагональ делит его на два равных равнобедренных треугольника с углом при вершине $60°$, то есть эти треугольники являются равносторонними с площадями $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Тогда площадь ромба есть:



$$S = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Решим уравнение

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 36 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 6.$$

Таким образом, меньшая диагональ ромба равна 6.

Ответ: 6.

B5. Вычислите значение произведения $x \cdot y$, где $(x;\, y)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ (x^2 - y^2)(x+y) = 200. \end{cases}$

Решим уравнение

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ (x^2 - y^2)(x+y) = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ (x-y)(x+y)^2 = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ (x+y)^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ \left[\begin{array}{l} x + y = -10, \\ x + y = 10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = -10, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 10 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4, \\ y = -6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6, \\ y = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, произведением решений системы будет являться число 24.

Ответ: 24.

B6. Теплоход прошел расстояние от A до B по течению реки за 7 ч, а от B до A — за 14 ч. За какое время проплывет от A до B плот?

Пусть S — расстояние между A и B, v — скорость теплохода, u — скорость течения реки ($S, v, u > 0$, $v > u$). При движении из A в B скорость теплохода была $v + u = \frac{S}{7}$ км/ч, при движении из B в A скорость была $v - u = \frac{S}{14}$ км/ч.

Решим систему

$$\begin{cases} v + u = \frac{S}{7}, \\ v - u = \frac{S}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v + u = 2(v - u), \\ v - u = \frac{S}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3u, \\ u = \frac{S}{28}. \end{cases}$$

Таким образом, скорость течения реки равна $\frac{S}{28}$ км/ч, и плот, движущийся со скоростью реки, пройдет пусть от A до B за 28 часов.

Ответ: 28 часов.

B7. Вычислите значение выражения $5\sin(\arccos 0,6)$.

$$5\sin(\arccos 0,6) = 5 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\arccos 0,6)} = 5 \cdot \sqrt{1 - (0,6)^2} = 5 \cdot \sqrt{0,64} = 5 \cdot 0,8 = 4.$$

Ответ: 4.

B8. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{3}^{\,2-x^2+4x}$.

Так как $\sqrt{3} > 1$, наибольшее значение функция $y(x)$ принимает при наибольшем значении функции $g(x) = 2 - x^2 + 4x$. Квадратный трехчлен $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ принимает наибольшее значение в точке $x = \frac{-4}{2(-1)} = 2$, и оно равно $g(2) = 6$. Таким образом, наибольшее значение функции есть $y = \sqrt{3}^{\,6} = 27$.

Ответ: 27.

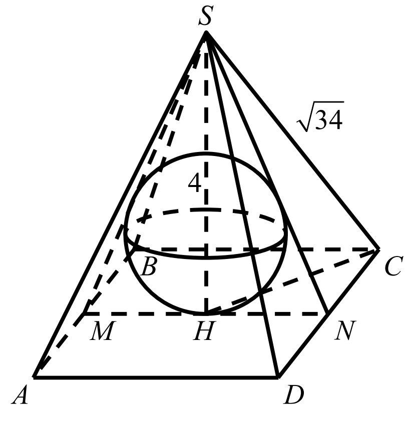
B9. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 4 м, а боковое ребро — $\sqrt{34}$ м. Найдите площадь сферы, вписанной в пирамиду (число π считайте равным 3).

Пусть $SABCD$ — есть заданная пирамида. Соединим основание высоты пирамиды с вершиной основания пирамиды (см. рисунок.). Поскольку треугольник SHC — прямоугольный, длина HC равна:

$$|HC| = \sqrt{|SC|^2 - |SH|^2} = \sqrt{34 - 16} = \sqrt{18} \text{ м.}$$

Тогда сторона квадрата $ABCD$ равна $|HC| \cdot \sqrt{2} = 6$ м.

Проведем сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр сферы, перпендикулярно сторонам основания и рассмотрим треугольник SMN, где M, N соответственно середины сторон AB и CD квадрата. Радиус сферы есть радиус окружности, вписанной в треугольник SMN.



Поскольку $r=\dfrac{S}{p}$, причем

$$S=\frac{1}{2}|SH|\cdot|MN|=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12 \text{ м}^2,$$

$$p=\frac{1}{2}(|MS|+|SN|+|NM|)=\frac{1}{2}(\sqrt{16+9}+\sqrt{16+9}+6)=$$
$$=\frac{1}{2}(5+5+6)=\frac{16}{2}=8 \text{ м}; \; r=\frac{S}{p}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \text{ м}.$$

Тогда площадь сферы есть:

$$S_{\text{сф.}}=4\pi r^2=4\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2\Bigg|_{\pi=3}=4\cdot 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=27 \text{ м}^2.$$

Ответ: 27 м^2.

B10. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором функция $g(x)=ax^2-x^3-3ax-1$ убывает на множестве всех действительных чисел.

Функция $g(x)$ убывает на $\mathbb{R}$ только в том случае, когда ее производная $g'(x)=2ax-3x^2-3a$ неположительна на $\mathbb{R}$, то есть уравнение $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2ax+3a=0$ не имеет более одного корня. Для этого достаточна неположительность дискриминанта. Решим соответствующее неравенство:

$$D\le 0 \Leftrightarrow \frac{D}{4}\le 0 \Leftrightarrow a^2-9a\le 0 \Leftrightarrow 0\le a\le 9.$$

Наибольшее целое значение параметра: 9.
Ответ: 9.

Часть С

С1. Решите неравенство $(2-|x-1|)\log_{\frac{1}{10}}(4x^2+8)\le 0$.

Так как $4x^2+8>1$, а $\dfrac{1}{10}<1$, то $\log_{\frac{1}{10}}(4x^2+8)<0$, тогда

$$2-|x-1|\ge 0 \Leftrightarrow |x-1|\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\le 2 \\ x-1\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le x\le 3.$$

Ответ: $[-1;\,3]$.

С2. Найдите нули функции $h(x)=6x+x^2-x^3-\sqrt{\cos\pi x-1}$.
Решим уравнение

$$6x+x^2-x^3=\sqrt{\cos\pi x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\pi x=1, \\ 6x+x^2-x^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x=2\pi k,\; k\in\mathbb{Z}, \\ x^3-x^2-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 0, \\ x = 3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 0. \end{array} \right.$$

Ответ: $\{-2;\,0\}$.

С3. Вычислите значение выражения $3^{\sqrt{\log_3 2}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}}$.

Покажем, что

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}} \Leftrightarrow \log_a a^{\sqrt{\log_a b}} = \log_a b^{\sqrt{\log_b a}} \Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a} \cdot \log_a b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a} \cdot \sqrt{\log_a^2 b} \Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a \cdot \log_a^2 b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\frac{\log_a^2 b}{\log_a b}} \Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_a b} \text{ — верно.}$$

Тогда ответ к задаче — нуль.

Ответ: 0.